UGESEDDEL 52

Opgave 1

Denne opgave er et matematisk eksempel på Ricardo's én-faktor model, der præsenteres i Krugman & Obstfeld kapitel 2 side 12-19. Denne model beskriver handel som et udslag af komparative fordele landene imellem.
Grundlæggende er der tale om en generel ligevægtsmodel, med 2 varer (ost og vin), 4 virksomheder/sektorer (2 i hvert land), 2 faktorer (arbejdskraft i hvert land) samt to forbrugere (én i hvert land). Dertil hører 4 priser, nemlig de to varepriser og lønnen i hvert af de to lande. Vi vil dog lave en lave genvej, der gør opgaven mere overskuelig. Genvejen består i at opfatte hvert land som én central beslutningsenhed. Man kan se det som om, at forbrugeren ejer begge virksomheder og bestemmer, hvad der skal produceres.

Lad os indledningsvis betragte *land H*. Dette land skal først bestemme en produktionsplan, således at indkomsten til forbrugeren bliver størst mulig. Dernæst vælger forbrugeren sit optimale forbrug givet denne indkomst.
Størrelsen $\frac{a_{LC}}{a_{LW}}$ er afgørende, når den optimale produktion skal fastlægges. Den angiver nemlig omkostningerne ved at producere ost relativt til vin målt i enheder arbejdskraft. Dvs. alternativomkostningen ved ost relativt til vin. Størrelsen skal naturligvis sammenlignes med markedets vurdering af de to goder, dvs. de relative prisforhold $\frac{p_C}{p_W}$. Dette gøres nedenfor:

i) $\frac{p_C}{p_W} > \frac{a_{LC}}{a_{LW}}$:
I dette tilfælde er omkostningen ved produktion af ost relativt til vin mindre en prisen på ost relativt til vin. Landet vil derfor bruge alle sine ressourcer på at producere ost. Dette kan også ses, idet én enhed arbejdskraft brugt på ost giver indtægten $\frac{p_C}{a_{LC}}$, mens den tilsvarende indtægt for vin er $\frac{p_W}{a_{LW}}$. Da førstnævnte indtægt er større end sidstnævnte, produceres naturligvis kun ost. Dermed bliver den optimale produktionsplan $(y_C, y_W) = \left(\frac{L}{a_{LC}}, 0\right)$, hvor L betegner mængden af arbejdskraft i landet.

ii) $\frac{p_C}{p_W} < \frac{a_{LC}}{a_{LW}}$:
Nu betragtes den omvendte situation, hvorfor landet selvfølgelig kun producerer vin, dvs. $(y_C, y_W) = \left(0, \frac{L}{a_{LW}}\right)$.

iii) $\frac{p_C}{p_W} = \frac{a_{LC}}{a_{LW}}$:

I denne situation er landet indifferent mellem at producere ost og vin. Produktionen kan derfor skrives som $(y_C, y_W) = \left(\lambda\frac{L}{a_{LC}}, (1-\lambda)\frac{L}{a_{LW}}\right)$, hvor $0 \leq \lambda \leq 1$.

Forbrugeren vælger sit optimale forbrug givet priserne og indkomsten $p_C y_C + p_W y_W$. Cobb-Douglas-præferencerne givet i opgaveteksten giver den velkendte løsning

$$(x_C, x_W) = \left(\frac{2}{3}\frac{p_C y_C + p_W y_W}{p_C}, \frac{1}{3}\frac{p_C y_C + p_W y_W}{p_W}\right). \tag{1}$$

I *land F*, der betegnes med toptegn *, fås ved tilsvarende argumenter følgende produktion:

i) $\frac{p_C}{p_W} > \frac{a^*_{LC}}{a^*_{LW}}$: $\quad (y^*_C, y^*_W) = \left(\frac{L}{a^*_{LC}}, 0\right)$.

ii) $\frac{p_C}{p_W} < \frac{a^*_{LC}}{a^*_{LW}}$: $\quad (y^*_C, y^*_W) = \left(0, \frac{L}{a^*_{LW}}\right)$.

iii) $\frac{p_C}{p_W} = \frac{a^*_{LC}}{a^*_{LW}}$: $\quad (y^*_C, y^*_W) = \left(\lambda^*\frac{L}{a^*_{LC}}, (1-\lambda^*)\frac{L}{a^*_{LW}}\right)$, $0 \leq \lambda^* \leq 1$.

Forbruget er her

$$(x^*_C, x^*_W) = \left(\frac{1}{3}\frac{p_C y^*_C + p_W y^*_W}{p_C}, \frac{2}{3}\frac{p_C y^*_C + p_W y^*_W}{p_W}\right). \tag{2}$$

Endelig vil vi finde ligevægtspriserne og dermed også produktionen i ligevægt. Vi vil således komme med matematiske argumenter, der svarer til figur 2-3 i Krugman. Lad os indledningsvis vælge vin som numeraire, dvs. $p_W = 1$. Derudover bør vi erindre antagelsen $\frac{a_{LC}}{a_{LW}} < \frac{a^*_{LC}}{a^*_{LW}}$; med andre ord har land H en komparativ fordel i produktion af ost - dermed har land F en komparativ fordel i produktion af vin. Vi vil nu for forskellige værdier af $\frac{p_C}{p_W} = p_c$ undersøge muligheden for ligevægt:

I. $\frac{p_C}{p_W} = p_C < \frac{a_{LC}}{a_{LW}}$:

Her vil begge lande kun producere vin. Dette kan ikke forekomme i en ligevægt, da forbrugerne givet Cobb-Douglas-præferencer og positiv indkomst altid vil forbruge en positiv mængde ost.

II. $\frac{p_C}{p_W} = p_C = \frac{a_{LC}}{a_{LW}}$:

I dette tilfælde producerer land F kun vin, mens land H vilkårligt fordeler sin produktion mellem ost og vin. Vi finder nu λ ved at cleare markedet for ost, hvor de konkrete priser er indsat:

$$y_C = x_C + x_C^* \quad \Leftrightarrow \quad \lambda \frac{L}{a_{LC}} = \frac{2}{3}\frac{p_C y_C + p_W y_W}{p_C} + \frac{1}{3}\frac{p_C y_C^* + p_W y_W^*}{p_C} =$$
$$\frac{2}{3}\frac{\frac{a_{LC}}{a_{LW}}\lambda\frac{L}{a_{LC}} + (1-\lambda)\frac{L}{a_{LW}}}{\frac{a_{LC}}{a_{LW}}} + \frac{1}{3}\frac{\frac{L}{a_{LW}^*}}{\frac{a_{LC}}{a_{LW}}} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\frac{a_{LW}}{a_{LW}^*} > 0$$

Da λ er positiv er betingelsen for en ligevægt derfor:

$$\lambda \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad a_{LW} \leq a_{LW}^*$$

Kravet er altså, at land H skal have en absolut fordel i vin.

III. $\frac{a_{LC}}{a_{LW}} < \frac{p_C}{p_W} = p_C < \frac{a_{LC}^*}{a_{LW}^*}$:

Her producerer land H kun ost, mens land F kun producerer vin. Vi finder nu ligevægtsprisen ved at cleare markedet for vin:

$$y_W^* = x_W + x_W^* \quad \Leftrightarrow \quad \frac{L}{a_{LW}^*} = \frac{1}{3}\frac{p_C y_C + p_W y_W}{p_W} + \frac{2}{3}\frac{p_C y_C^* + p_W y_W^*}{p_W} =$$
$$\frac{1}{3}p_C\frac{L}{a_{LC}} + \frac{2}{3}\frac{L}{a_{LW}^*} \quad \Leftrightarrow \quad p_C = \frac{a_{LC}}{a_{LW}^*}$$

Betingelsen for en ligevægt er derfor:

$$\frac{a_{LC}}{a_{LW}} < p_C = \frac{a_{LC}}{a_{LW}^*} < \frac{a_{LC}^*}{a_{LW}^*} \quad \Leftrightarrow \quad a_{LC} < a_{LC}^* \;\wedge\; a_{LW} > a_{LW}^*$$

Kravet er altså, at landene skal have absolutte fordele i de varer, hvori de også har komparative fordele.

IV. $\frac{p_C}{p_W} = p_C = \frac{a_{LC}^*}{a_{LW}^*}$:

I dette tilfælde producerer land H kun ost, mens land F vilkårligt fordeler sin produktion mellem ost og vin. Vi finder nu λ^* ved at cleare markedet for vin, hvor de konkrete priser er indsat:

$$y_W^* = x_W + x_W^* \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^* \frac{L}{a_{LW}^*} = \frac{1}{3}\frac{p_C y_C + p_W y_W}{p_W} + \frac{2}{3}\frac{p_C y_C^* + p_W y_W^*}{p_W} =$$
$$\frac{1}{3}\frac{a_{LC}^*}{a_{LW}^*}\frac{L}{a_{LC}} + \frac{2}{3}\left(\frac{a_{LC}^*}{a_{LW}^*}\lambda^*\frac{L}{a_{LC}^*} + (1-\lambda^*)\frac{L}{a_{LW}^*}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^* = \frac{1}{3}\frac{a_{LC}^*}{a_{LC}} + \frac{2}{3} > 0$$

Da λ^* er positiv er betingelsen for en ligevægt derfor:

$$\lambda^* \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad a_{LC} \geq a_{LC}^*$$

Kravet er altså, at land F skal have en absolut fordel i ost.

V. $\frac{p_C}{p_W} = p_C > \frac{a^*_{LC}}{a^*_{LW}}$:
Her vil begge lande kun producere ost. Jf. argumenterne i punkt I. kan dette aldrig være en ligevægt.

Til slut opsummerer vi den fundne ligevægt.

Hvis $a_{LC} < a^*_{LC}$ og $a_{LW} > a^*_{LW}$, producerer land H kun ost, land F producerer kun vin, mens ligevægtspriserne er

$$(p_C, p_W) = \left(\frac{a_{LC}}{a^*_{LW}}, 1\right). \tag{3}$$

Hvis $a_{LW} \leq a^*_{LW}$, producerer land H både ost og vin, land F producerer kun vin, mens ligevægtspriserne er

$$(p_C, p_W) = \left(\frac{a_{LC}}{a_{LW}}, 1\right). \tag{4}$$

Hvis $a_{LC} \geq a^*_{LC}$, producerer land H kun ost, land F producerer både ost og vin, mens ligevægtspriserne er

$$(p_C, p_W) = \left(\frac{a^*_{LC}}{a^*_{LW}}, 1\right). \tag{5}$$

Det ses altså, at landene som udgangspunkt producerer den vare, hvori de har en komparativ fordel. Dette er i overensstemmelse med den generelle logik bag komparative fordele i Krugman. Vores analyse indeholder dog også to specialtilfælde, hvor det ene land producerer begge varer. F.eks. vil land H også producere vin, når landet har en absolut fordel i vin (og dermed også i ost givet antagelsen om komparative fordele). Intuitionen i dette er, at land H nu er rigere (pga. større produktivitet) end land F og dermed ikke kan overlade hele vinproduktionen til land F, da land F ikke kan producere nok vin til alene at opfylde land H's behov. Tænk på en verden bestående kun af Danmark og Uganda. Her vil Danmark typisk producere en del fødevarer, selv om Uganda skulle have en komparativ fordel i denne varegruppe.

Endelig bliver bedt om beregne lønningerne i de to lande. Lønnen indgår ikke som en pris i vores analyse, da vi som nævnt i indledningen skyder en genvej og dermed ikke betragter arbejdskraft som en vare, der handles på et marked. Havde man gjort dette ville lønnen dog være lig markedsværdien af arbejdskraftens marginalprodukt. Det er jo den klassiske førsteordensbetingelse fra virksomhedernes optimeringsproblem – en betingelse der er velkendt fra bl.a. makro. Betegnes lønnen w, haves altså $w = MP_L \cdot p$, hvor priser og marginalprodukt naturligvis skal findes i de sektorer, der producerer i ligevægt. Er der produktion i begge sektorer, vil lønnen i de to sektorer selvfølgelig være ens, da arbejdskraften ellers ikke vil ønske at arbejde begge steder. Marginalproduktet er i denne opgave lig den reciprokke værdi af a'erne. Denne størrelse angiver netop merproduktionen ved én ekstra enhed arbejdskraft.

Da land H i ligevægt altid producerer ost, og land F i ligevægt altid producerer vin, er lønnen i de to lande, givet ligevægtspriserne $(p_C, 1)$,

$$w = \frac{p_C}{a_{LC}} \quad og \quad w^* = \frac{1}{a^*_{LW}}. \tag{6}$$

Opgave 2

Denne opgave er et matematisk eksempel på argumenterne i Krugman & Obstfeld kapitel 4 side 68-75. Der er således tale om en såkaldt Heckscher-Ohlin model, som illustrerer, hvorledes forskelle i ressourcer lande imellem kan føre til handel. Her i opgaven vil vi dog kun se på et enkelt land, og vi vil specifikt undersøge, hvorledes produktionsfaktorerne fordeles givet varepriserne. Disse priser tages for givne, hvorved vi kan opfatte landet som en lille, åben økonomi.

Figurer må i tænke Jer til, men jeg henviser til Krugman i de tilfælde, hvor de relevante figurer findes der.

a) Vi vil nu løse et omkostningsminimeringsproblem[1] for en konkret virksomhed med produktionsfunktionen $F(L,K) = L^a K^{1-a}, \;\; 0 < a < 1$. Vi skal altså for et givet output Y bestemme optimale mængder af inputs (L og K), således at de samlede omkostnigner $C(Y)$ bliver mindst mulige. Problemet er derfor:

$$\min_{L,K} C(Y) = wL + rK \qquad \text{ub.} \;\; Y = L^a K^{1-a}.$$

Hvis bibetingelsen omskrives til $K = Y^{\frac{1}{1-a}} L^{\frac{-a}{1-a}}$, og denne substitueres ind i udtrykket for de samlede omkostninger, er problemet nu

$$\min_L C(Y) = wL + rY^{\frac{1}{1-a}} L^{\frac{-a}{1-a}}.$$

[1]På grund af konstant skalaafkast er det nødvendigt at minimere omkostninger fremfor at maksimere profit.

Den relevante førsteordensbetingelse er

$$\begin{aligned}\frac{\partial C(Y)}{\partial L} = w + rY^{\frac{1}{1-a}}\frac{-a}{1-a}L^{\frac{-1}{1-a}} = 0 \quad &\Leftrightarrow \\ L^* = \left(\frac{1-a}{a}\frac{w}{r}\right)^{-(1-a)} Y&.\end{aligned} \tag{7}$$

Indsættes dette i udtrykket for K, fås

$$K^* = \left(\frac{a}{1-a}\frac{r}{w}\right)^{-a} Y. \tag{8}$$

Nu kan de minimale omkostninger for et givet outputniveau beregnes som

$$\begin{aligned}C(Y) = wL^* + rK^* = \left[\left(\frac{1-a}{a}\right)^{-(1-a)} r^{1-a}w^a + \left(\frac{a}{1-a}\right)^{-a} r^{1-a}w^a\right] Y = \\ \left[\left(\frac{1-a}{a}\right)^{-(1-a)} + \left(\frac{a}{1-a}\right)^{-a}\right] r^{1-a}w^a Y = \\ \left[\left(\frac{1-a}{a}\right)^{-1} + 1\right]\left(\frac{1-a}{a}\right)^{a} r^{1-a}w^a Y = \left[\frac{w}{a}\right]^a \left[\frac{r}{1-a}\right]^{1-a} Y.\end{aligned}$$

Differentieres mht. Y fås desuden et udtryk for marginalomkostningerne

$$MC(Y) = \left[\frac{w}{a}\right]^a \left[\frac{r}{1-a}\right]^{1-a}. \tag{9}$$

Det ses, at marginalomkostningerne er konstante og uafhængige af Y. Dette skyldes konstant skalaafkast.

b) Nu introduceres et konkret land med to produktionssektorer, der producerer henholdsvis fødevarer (f) og tøj (c). Begge sektorer har Cobb-Douglas produktionsfunktioner, som benyttet i spørgsmål a.

Generelt kan sammenhængen mellem en tilfældig sektors optimale capital-labour-forhold og den relative faktorpris $\frac{w}{r}$ findes via division af ligningerne (7) og (8). På den måde fås

$$\frac{L^*}{K^*} = \frac{a}{1-a}\frac{r}{w} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{w}{r} = \frac{a}{1-a}\frac{K^*}{L^*}.$$

Udnyttes de givne værdier af a fra opgaveteksten fås de konkrete udtryk for de to sektorer:

$$\frac{w}{r} = 2\frac{K_f^*}{L_f^*} \quad \text{og} \quad \frac{w}{r} = \frac{1}{2}\frac{K_c^*}{L_c^*}. \tag{10}$$

(10) angiver de matematiske udtryk for figur 4-2 i Krugman.[2]

[2]I modsætning til Krugman er linien tilhørende fødevarer dog i denne opgave stejlest.

Under antagelse af at begge sektorer producerer (jf. fodnote 3 i s. 72) gælder den sædvanlige førsteordensbetingelse, når vi som her har fuldkommen konkurrence, dvs.

$$p_i = MC_i(Y) \quad , \quad i = f, c.$$

Udnyttes nu ligning (9), der jo angiver marginalomkostningerne, fås for de konkrete værdier af a, at

$$\frac{p_f}{p_c} = \frac{MC_f(Y)}{MC_c(Y)} = \frac{\left(\frac{3}{2}w\right)^{\frac{2}{3}}(3r)^{\frac{1}{3}}}{(3w)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{3}{2}r\right)^{\frac{2}{3}}} = \left(\frac{w}{r}\right)^{\frac{1}{3}}. \tag{11}$$

(11) angiver det matematiske udtryk for figur 4-3 i Krugman – den såkaldte Stolper-Samuelson-effekt.

Figur 4-4 i Krugman fås nu ved at sammensætte figur 4-2 og figur 4-3. Dermed er det muligt for et givet prisforhold (eksogent bestemt på verdensmarkedet) at finde faktorprisforholdet (via (11)) og herefter udregne capital-labour-forholdet for de to sektorer (via (10)).

c) På verdensmarkedet haves nu prisforholdet $\frac{p_f}{p_c} = 1$. Som beskrevet ovenfor kan vi bestemme sektorernes optimale input-forhold givet disse priser. Først findes faktorprisforholdet via (11):

$$\frac{p_f}{p_c} = \left(\frac{w}{r}\right)^{\frac{1}{3}} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{w}{r} = 1.$$

Nu kan vi så udnytte (10). Idet vi fra nu af dropper toptegn *, fås

$$\begin{aligned} \frac{w}{r} &= 2\frac{K_f}{L_f} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{K_f}{L_f} = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad K_f = \frac{1}{2}L_f \\ \frac{w}{r} &= \frac{1}{2}\frac{K_c}{L_c} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{K_c}{L_c} = 2. \quad \Leftrightarrow \quad K_c = 2L_c. \end{aligned} \tag{12}$$

Endelig kan vi bestemme mængden af kapital og arbejdskraft, der i ligevægt benyttes i de to sektorer. Idet økonomien er udstyret med 100 enheder kapital og 100 enheder arbejdskraft, må følgende to ligevægtsbetingelser være opfyldt:

$$100 = L_f + L_c \quad \Leftrightarrow \quad L_c = 100 - L_f. \tag{13}$$

$$100 = K_f + K_c = \frac{1}{2}L_f + 2L_c = \frac{1}{2}L_f + 2(100 - L_f). \tag{14}$$

I ligning (14) har vi nu én ligning med én ubekendt, der kan løses, således at

$$\frac{3}{2}L_f = 100 \quad \Leftrightarrow \quad L_f = \frac{200}{3}.$$

Via (12), (13) og produktionsfunktionerne kan vi finde de øvrige relevante størrelser, som

$$L_c = \frac{100}{3} \quad , \quad K_f = \frac{100}{3} \quad , \quad K_c = \frac{200}{3} \quad , \quad Y_f = 52,91 \quad , \quad Y_c = 52,91.$$

Denne beregning er den matematiske pendant til figur 4-5 i Krugman.

d) Nu analyseres en situation, hvor mængden af arbejdskraft alt andet lige stiger til 200. Dermed ændres ligning (14) til

$$100 = \frac{1}{2}L_f + 2(200 - L_f) \quad \Leftrightarrow \quad L_f = 200. \tag{15}$$

De øvrige størrelser er nu

$$L_c = 0 \quad , \quad K_f = 100 \quad , \quad K_c = 0 \quad , \quad Y_f = 158,74 \quad , \quad Y_c = 0.$$

Det ses således, at produktionen af fødevarer nu lægger beslag på samtlige ressourcer i økonomien. Dette resultat er et specialtilfælde af den såkaldte Rybczynski-effekt (jf. fodnote 4, s. 75). Denne siger, at stiger mængden af en faktor, vil produktionen stige i den sektor, som bruger faktoren intensivt (her fødevarer). Omvendt vil produktionen falde i den anden sektor (her tøj). Dette er illustreret i figur 4-6 og figur 4-7 i Krugman.

Frederik Silbye, Mikro 2 - Markeder og Velfærd, 28.12.2004