UGESEDDEL 1 – OPGAVE 3

Vi betragter en *von Neumann-Morgenstern* nyttefunktion (*vNM*) *U(x)* over lotterier *x*.Vi vil nu bevise, at *W(x)* er en anden vNM nyttefunktion, der repræsenterer samme lotteripræferencer som *U(x)*, *hvis og kun hvis* $W(x) = \beta U(x) + \gamma$, hvor $\beta > 0$.

"Hvis og kun hvis" svarer matematisk til tegnet "$\Leftrightarrow$". Således skal vi bevise, at:

"*W(x)* er på vNM-form og repræsenterer samme præferencer som *U(x)*"

$$\Leftrightarrow$$

"$W(x) = \beta U(x) + \gamma$, hvor $\beta > 0$".

Beviset deles op i to dele – en for hver vej i $\Leftrightarrow$:

1. "$\Leftarrow$": Vi forudsætter at funktionen *W(x)* er defineret som $W(x) = \beta U(x) + \gamma$. Da er *W(x)* på vNM-form og repræsenterer samme præferencer som *U(x)*.
2. "$\Rightarrow$": Vi forudsætter at *W(x)* er en vNM-nyttefunktion, der repræsenterer samme præferencer som *U(x)*. Da gælder, at $W(x) = \beta U(x) + \gamma$.

Ad 1) Vi ser umiddelbart, at *W(x)* repræsenterer de samme præferencer som *U(x)*, da *W(x)* jo blot er en *positiv monoton transformation* af *U(x)*. Dermed rangerer *W(x)* de forskellige lotterier på samme måde som *U(x)*.
Endvidere gælder om *W(x)*, idet *U(x)* jo er på vNM-form, at:

$$W(x) = \beta U(x) + \gamma = \beta \sum_{s=1}^{S} \pi_{xs} v_{xs} + \gamma = \beta \sum_{s=1}^{S} \pi_{xs} v_{xs} + \gamma \sum_{s=1}^{S} \pi_{xs} = \sum_{s=1}^{S} \pi_{xs} (\beta v_s + \gamma)$$

Dermed ses, at *W(x)* også er på vNM-form blot med transformerede nytteværdier til hver tilstand.

Ad 2) Vi definerer indledningsvis x^H og x^L som de lotterier i den samlede mængde af mulige lotterier *X*, der giver henholdsvis den højeste og laveste nytte. Vi betragter nu et tilfældigt lotteri $x \in X$ (dvs. $x^H \succeq x \succeq x^L$). Der vil nu findes et tal $\lambda_x \in [0;1]$, således at:

$$U(x)=\lambda_x U(x^H)+(1-\lambda_x)U(x^L). \quad \text{Altså er } \lambda_x=\frac{U(x)-U(x^L)}{U(x^H)-U(x^L)}.$$

Da *U(x)* er en vNM-nyttefunktion og dermed er *lineær* jf. beviset i opgave 2, følger at:

$$U(x)=\lambda_x U(x^H)+(1-\lambda_x)U(x^L)=U(\lambda_x x^H+(1-\lambda_x)x^L).$$

W(x) repræsenterer jo pr. forudsætning samme præferencer som *U(x)*. Derfor gælder:

$$W(x)=W(\lambda_x x^H+(1-\lambda_x)x^L)$$

Endvidere forudsatte vi, at *W(x)* var på vNM-form og dermed lineær. Dette giver:

$$W(x)=W(\lambda_x x^H+(1-\lambda_x)x^L)=\lambda_x W(x^H)+(1-\lambda_x)W(x^L).$$

Nu indsætter vi udtrykket for λ_x, hvilket efter lidt udregninger giver:

$$W(x)=\lambda_x\left(W(x^H)-W(x^L)\right)+W(x^L)=\frac{U(x)-U(x^L)}{U(x^H)-U(x^L)}\left(W(x^H)-W(x^L)\right)+W(x^L)$$

$$=\frac{W(x^H)-W(x^L)}{U(x^H)-U(x^L)}U(x)+W(x^L)-U(x^L)\frac{W(x^H)-W(x^L)}{U(x^H)-U(x^L)}=\beta U(x)+\gamma,$$

$$\text{hvor } \beta\equiv\frac{W(x^H)-W(x^L)}{U(x^H)-U(x^L)} \quad \text{og} \quad \gamma\equiv W(x^L)-U(x^L)\frac{W(x^H)-W(x^L)}{U(x^H)-U(x^L)}.$$

Dermed må *W(x)* nødvendigvis være en positiv *affin* (dvs. på formen a·x + b) transformation af *U(x)*, idet $U(x^H)$, $U(x^L)$, $W(x^H)$ og $W(x^L)$ blot er konstanter.[1]

Konsekvenser af beviset:

Selv om alle positive monotone transformationer af *U(x)* repræsenterer uændrede præferencer for lotterier, er det kun positive affine transformationer af *U(x)*, der bevarer vNM-formen. Heraf følger, at kun positive affine transformationer af nytteværdierne $v_1,\ldots,v_S$ til de enkelte tilstande *1,…,S* holder præferencerne for lotterier uændrede. Dermed er dette nyttebegreb *kardinalt* og ikke *ordinalt*, som vi kender det fra den normale forbrugerteori.

[1] Vores bevis kræver strengt taget, at $U(x^H) > U(x^L)$. Sætningen holder dog også, hvis $U(x^H) = U(x^L)$.