

UGESEDDDEL 1 – OPGAVE 3

Vi betragter en *von Neumann-Morgenstern* nyttefunktion (vNM) $U(x)$ over lotterier x . Vi vil nu bevise, at $W(x)$ er en anden vNM nyttefunktion, der repræsenterer samme lotteri-præferencer som $U(x)$, hvis og kun hvis $W(x) = \beta U(x) + \gamma$, hvor $\beta > 0$.

”Hvis og kun hvis” svarer matematisk til tegnet ” \Leftrightarrow ”. Således skal vi bevise, at:

” $W(x)$ er på vNM-form og repræsenterer samme præferencer som $U(x)$ ”

\Leftrightarrow

” $W(x) = \beta U(x) + \gamma$, hvor $\beta > 0$ ”.

Beviset deles op i to dele – en for hver vej i \Leftrightarrow :

1. ” \Leftarrow ”: Vi forudsætter at funktionen $W(x)$ er defineret som $W(x) = \beta U(x) + \gamma$. Da er $W(x)$ på vNM-form og repræsenterer samme præferencer som $U(x)$.
2. ” \Rightarrow ”: Vi forudsætter at $W(x)$ er en vNM-nyttefunktion, der repræsenterer samme præferencer som $U(x)$. Da gælder, at $W(x) = \beta U(x) + \gamma$.

Ad 1) Vi ser umiddelbart, at $W(x)$ repræsenterer de samme præferencer som $U(x)$, da $W(x)$ jo blot er en *positiv monoton transformation* af $U(x)$. Dermed rangerer $W(x)$ de forskellige lotterier på samme måde som $U(x)$.

Endvidere gælder om $W(x)$, idet $U(x)$ jo er på vNM-form, at:

$$W(x) = \beta U(x) + \gamma = \beta \sum_{s=1}^S \pi_{xs} v_{xs} + \gamma = \beta \sum_{s=1}^S \pi_{xs} v_{xs} + \gamma \sum_{s=1}^S \pi_{xs} = \sum_{s=1}^S \pi_{xs} (\beta v_s + \gamma)$$

Dermed ses, at $W(x)$ også er på vNM-form blot med transformerede nytteværdier til hver tilstand.

Ad 2) Vi definerer indledningsvis x^H og x^L som de lotterier i den samlede mængde af mulige lotterier X , der giver henholdsvis den højeste og laveste nytte. Vi betragter nu et tilfældigt lotteri $x \in X$ (dvs. $x^H \succeq x \succeq x^L$). Der vil nu findes et tal $\lambda_x \in [0;1]$, således at:

$$U(x) = \lambda_x U(x^H) + (1 - \lambda_x) U(x^L). \text{ Altså er } \lambda_x = \frac{U(x) - U(x^L)}{U(x^H) - U(x^L)}.$$

Da $U(x)$ er en vNM-nyttefunktion og dermed er *lineær* jf. beviset i opgave 2, følger at:

$$U(x) = \lambda_x U(x^H) + (1 - \lambda_x) U(x^L) = U(\lambda_x x^H + (1 - \lambda_x) x^L).$$

$W(x)$ repræsenterer jo pr. forudsætning samme præferencer som $U(x)$. Derfor gælder:

$$W(x) = W(\lambda_x x^H + (1 - \lambda_x) x^L)$$

Endvidere forudsatte vi, at $W(x)$ var på vNM-form og dermed lineær. Dette giver:

$$W(x) = W(\lambda_x x^H + (1 - \lambda_x) x^L) = \lambda_x W(x^H) + (1 - \lambda_x) W(x^L).$$

Nu indsætter vi udtrykket for λ_x , hvilket efter lidt udregninger giver:

$$\begin{aligned} W(x) &= \lambda_x (W(x^H) - W(x^L)) + W(x^L) = \frac{U(x) - U(x^L)}{U(x^H) - U(x^L)} (W(x^H) - W(x^L)) + W(x^L) \\ &= \frac{W(x^H) - W(x^L)}{U(x^H) - U(x^L)} U(x) + W(x^L) - U(x^L) \frac{W(x^H) - W(x^L)}{U(x^H) - U(x^L)} = \beta U(x) + \gamma, \end{aligned}$$

$$\text{hvor } \beta \equiv \frac{W(x^H) - W(x^L)}{U(x^H) - U(x^L)} \quad \text{og} \quad \gamma \equiv W(x^L) - U(x^L) \frac{W(x^H) - W(x^L)}{U(x^H) - U(x^L)}.$$

Dermed må $W(x)$ nødvendigvis være en positiv *affin* (dvs. på formen $a \cdot x + b$) transformation af $U(x)$, idet $U(x^H)$, $U(x^L)$, $W(x^H)$ og $W(x^L)$ blot er konstanter.¹

Konsekvenser af beviset:

Selv om alle positive monotone transformationer af $U(x)$ repræsenterer uændrede præferencer for lotterier, er det kun positive affine transformationer af $U(x)$, der bevarer vNM-formen. Heraf følger, at kun positive affine transformationer af nytteværdierne v_1, \dots, v_S til de enkelte tilstande $1, \dots, S$ holder præferencerne for lotterier uændrede. Dermed er dette nyttebegreb *kardinalt* og ikke *ordinalt*, som vi kender det fra den normale forbrugerteori.

¹ Vores bevis kræver strengt taget, at $U(x^H) > U(x^L)$. Sætningen holder dog også, hvis $U(x^H) = U(x^L)$.