

Real Business Cycles

af

Erik Bennike
&
Peter Rasmussen

Vejleder: Anders Nørgaard
Afleveringsdato: 25. april 2003
Økonomisk Institut, Københavns Universitet

Indholdsfortegnelse

1	Indledning.....	3
1.1	Problemformulering.....	3
1.2	Indledende bemærkninger.....	4
2	Modelteknisk gennemgang.....	5
2.1	Virksomhederne.....	5
2.2	Makrorelationer.....	6
2.3	Forbrugerne.....	7
2.3.1.	Arbejdsudbudsbeslutning.....	9
2.3.2.	Optimering af forbrugsprofilen.....	10
2.3.3.	Afvejningen mellem fritid og forbrug.....	12
3	Løsning af modellen.....	13
3.1	Markedsligevægten.....	13
3.2	Løsning for socialt optimum.....	15
3.3	Fluktuationer i produktion.....	17
4	Empiri.....	19
4.1	Opsparingskvote.....	19
4.2	Arbejdsudbud.....	20
4.3	Procyklisk realløn.....	23
5	Diskussion af modellen.....	24
5.1	Produktionsfluktuationer.....	24
5.2	Længerevarende effekter.....	26
5.3	Totalfaktorproduktiviteten.....	29
6	Perspektivering.....	30
7	Konklusion.....	32
	Litteraturliste.....	33
	Bilag 1.....	34
	Appendiks A.....	35
	Appendiks B.....	36

1 Indledning

I enhver kapitalistisk økonomi forekommer der periodiske svingninger i eksempelvis produktion og beskæftigelse. Sådanne svingninger kender vi som konjunktursvingninger. Konjunktursvingninger har betydelige realøkonomiske konsekvenser for agenterne i økonomien. Under en recession stiger arbejdsløsheden, virksomheder går konkurs og folk mister penge på deres investeringer. Af samme grund har der altid været en stor interesse for at kunne forklare og forstå disse svingninger, bl.a. med henblik på at kunne føre en hensigtsmæssig stabiliseringspolitik. En konjunkturmodel søger at forklare disse svingninger, og en Real Business Cycle (RBC) model er et eksempel på en sådan model.

RBC-teorien er en konjunkturteori, der på flere punkter adskiller sig markant fra de traditionelle konjunkturteorier. I lighed med de klassiske modeller, hvor produktionen alene bestemmes ud fra en klassisk produktionsfunktion med kapital og arbejdskraft som inputfaktorer, fokuserer RBC-modeller på udbudssiden som styrende faktor i økonomien. Fluktuationer drives i RBC-modeller af reale stød, som det fremgår af navnet. Dette er i skarp kontrast til den Keynesianske måde at tænke konjunkturteori på, hvor efterspørgselsiden og nominelle stød i den grad er afgørende. RBC-teorien åbner mulighed for at forklare konjunktursvingninger uden den Keynesianske antagelse om pristræghed og postulerede makroadfærdsrelationer. Det nok mest skelsættende ved RBC-modellerne i forhold til andre konjunkturmodeller er dels, at RBC-modellerne er generelle ligevægtsmodeller af Walrasiansk karakter, dvs. at alle agenter optimerer og at der er fuld markedsclearing, og dels at de *alene* fokuserer på udbudssiden i økonomien.

Real Business Cycle teoriens grundstamme blev lagt med et par banebrydende artikler i starten af 1980'erne. Først Kydland og Prescotts "*Time to build and aggregate fluctuations*" fra 1982 og siden Long og Plossers "*Real business cycles*" fra 1983. Det har været i disse to artikler, at meget af den senere litteratur omkring emnet har taget sit udgangspunkt.

1.1 Problemformulering

Kan en aggregering af mikrofundamentet fra en Walrasiansk økonomi, dvs. en model med optimerende agenter på mikroniveau samt fuld markedsclearing, på fornuftig vis udvides til en makrokonjunkturmodel? Hvad indebærer en sådan (RBC-) model for sammenhængen mellem markedsligevægten og den socialt optimale ligevægt? Kan den aggregerede model skabe fluktuationer i realøkonomiske variable, og hvilken mekanisme generer disse fluktuationer? Synes denne transitionsmekanisme at være rimelig? Og endeligt, hvordan er sammenhængen mellem modellens resultater og empiri?

1.2 Indledende bemærkninger

Efter at have opstillet modellen, analyseres mikrodelen af modellen, især forskellige aspekter af forbrugerens problem. Det undersøges, hvordan forbrugeren træffer sin beslutning vedrørende valg af arbejdsudbud og forbrug, herunder afvejningen mellem de to goder til rådighed for forbrugeren, forbrug og fritid, og optimeringen af forbrugsprofilen over tid.

Herefter behandles modellen på makroniveau i afsnit 3. Specielt behandles sammenhængen mellem markedsligevægten og den socialt optimale ligevægt. Løsningen fokuserer i begge tilfælde på to størrelser – opsparingskvote og arbejdsudbud, og det vises hvad modellen betyder for disse størrelser. Desuden udledes hvorledes produktionen fluktuerer i modellen.

I afsnit 4 ses på hvorledes tre af modellens centrale resultater stemmer overens med empiri. Vi vil her betragte modellens plausibilitet i et dansk perspektiv.

I afsnit 5 ser vi nærmere på fluktuationer i produktion, idet vi estimerer det såkaldte output gap for Danmark i en periode og sammenholder de fundne resultater med modellen. Derefter diskuteres den opstillede models mulighed for at forklare længerevarende effekter, og herunder betydningen af det postulerede bevægelsesmønster for teknologi.

Sidst perspektiveres modellen, idet det kort behandles hvilke muligheder for udvidelser af modellen, der viser sig oplagte, og hvorledes empiriske studier af sådanne udvidede modeller har vist sig i stand til at forklare konjunkturcykler.

Vi har valgt at fokusere på en simplificeret udgave af en RBC-model. Valget er foretaget ud fra den betragtning, at denne formulering af modellen giver større mulighed for at behandle modellen analytisk og dermed fortolke de udledte størrelser, og de mekanismer, der leder frem til de fundne konklusioner. Det er klart, at den simplificerede model ikke giver et helt retfærdigt billede af RBC-teoriens styrker og svagheder som konjunkturmodel, men vi har valgt at prioritere mulighederne for at forklare modellens ideer og konklusioner højere end at fremstille en version af modellen, der kan give bedre overensstemmelse med empiri.

I den empiriske undersøgelse i afsnit 4, fokuseres der af pladshensyn ikke på at kalibrere den samlede model. I stedet behandles enkelte af modellens konklusioner separat.

Af pladshensyn er desuden udeladt en ellers interessant diskussion om fordele og ulemper ved hhv. RBC-modellerne og de Keynesianske modeller, og mulighederne for at kombinere de to tilgange. Endvidere ses ej heller nærmere på muligheden for at inkludere nominelle stød i RBC-modellen.

Det skal på det kraftigste understreges at dette projekt skal ses som et produkt af en fælles arbejdsindsats. Alene af hensyn til formalia er det imidlertid valgt, at Peter Rasmussen står som forfatter på s. 5-10 og 18-26 og Erik Bennike står som forfatter på s. 10-18 og 26-31.

2 Modelteknisk gennemgang

Vi vil i de følgende afsnit gennemgå såvel mikro- som makrofundamentet i den betragtede RBC-model. Til trods for de forsimplende antagelser giver denne model et godt indblik i RBC-teoriens grundtanker. Vi vil derfor udlede modellen med særlig grundighed nedenfor, idet forståelse af modellens resultater og konklusioner kræver en god indsigt i fundamentet for modellen.

Kernen i den betragtede RBC-model bygges over en modificeret Ramsey model¹, hvilket medfører, at modellen har en række velkendte karakteristika. Økonomien i modellen har de klassiske walrasianske egenskaber, og markederne er komplette, kompetitive og der er ingen eksternaliteter. Disse standardegenskaber vil vi benytte nedenfor ved udledelsen af de økonomiske agents optimale adfærd. Gennem hele teksten er prisen på den homogene outputvare normeret til 1.

2.1 Virksomheder

Økonomien består af et givet antal homogene virksomheder, som er *små* i forhold til markedet, og de tager i deres profitmaksimering priserne for givet. Produktionsfunktionen beskrives ved den klassiske Cobb-Douglas funktion med konstant skalaafkast. Produktionsfaktorerne udgøres af kapital (K), arbejdskraft (L) og et residuelement (A). Residuelementet forklares i afsnit 2.2, og skal her blot betragtes som et produktivitetsforstærkende element for arbejdskraft. Dette giver os en produktionsfunktion af formen

$$Y_t = K_t^\alpha (A_t L_t)^{1-\alpha} \quad , \quad \alpha \in]0;1[\quad (2.1)$$

hvor α kan fortolkes som, hvor mange procent Y_t ændres som følge af 1 procent ændring i K_t , altså produktionselasticiteten med hensyn til kapital. Analogt kan $1 - \alpha$ fortolkes som produktionselasticiteten med hensyn til arbejdskraft².

Da markederne i økonomien er kompetitive, tjener virksomhederne ingen profit, og produktionsfaktorerne aflønnes hver med sit marginalprodukt. Reallønnen og realrenten kan derfor udledes direkte af produktionsfunktionen. Det skal dog bemærkes, at kapitalens marginalprodukt skal sættes lig den fulde kapitalomkostning ($r_t + \delta$).

$$w_t = \frac{\partial Y_t}{\partial L_t} = (1-\alpha) \cdot K_t^\alpha (A_t L_t)^{-\alpha} A_t = (1-\alpha) \cdot \left(\frac{K_t}{A_t L_t} \right)^\alpha A_t = (1-\alpha) \cdot \frac{Y_t}{L_t} \quad (2.2)$$

¹Kilde: Groth: "Note om Ramseymodellen og Pontryagins maksimumprincip", kapitel 2

² $El_{KY} = \frac{\partial Y}{\partial K} \frac{K}{Y} = \alpha$ og $El_{LY} = \frac{\partial Y}{\partial L} \frac{L}{Y} = 1 - \alpha$

$$r_t + \delta = \frac{\partial Y_t}{\partial K_t} = \alpha \cdot K_t^{\alpha-1} (A_t L_t)^{1-\alpha} = \alpha \cdot \left(\frac{K_t}{A_t L_t} \right)^{\alpha-1} \Leftrightarrow r_t = \alpha \cdot \frac{Y_t}{K_t} - \delta \quad (2.3)$$

Som det altid er tilfældet med Cobb-Douglas produktionsfunktionen, aflønnes faktorerne med en fast andel af produktionen. Der er endvidere aftagende marginalprodukter, dvs. at for et givet niveau af det ene input vil en forøgelse af det andet input bidrage gradvist mindre til produktionen. Dette afslutter behandlingen af virksomhedernes adfærd.

2.2 Makrorelationer

Vi betragter en lukket økonomi med én sektor, hvor virksomhedernes homogene output kan anvendes enten til forbrug eller opsparing. Økonomiens kapitalakkumulation kan udledes som følger:

$$\left. \begin{array}{l} K_{t+1} = K_t - \delta K_t + I_t \\ I_t = S_t = Y_t - C_t \end{array} \right\} \Rightarrow K_{t+1} = (1 - \delta)K_t + Y_t - C_t \Rightarrow K_{t+1}|_{\delta=1} = Y_t - C_t \quad (2.4)$$

Kapitalapparatet i periode $t+1$ udgøres af det ikke-nedslidte kapitalapparat fra periode t samt opsparingen fra samme periode. Vi antager 100% nedslidninger i hver periode, dvs. $\delta = 1$, og derfor vil hele kapitalapparatet være nedslidt efter hver periode. Derfor udgøres kapitalapparatet i hver periode alene af sidste periodes opsparing. Det skal klart understreges, at denne antagelse ikke gøres fordi den opfattes som realistisk, men alene fordi den er nødvendig for at løse modellen analytisk.

Endvidere antages det, at befolkningens størrelse er konstant, hvilket ikke vil ændre de kvalitative resultater³. Af bekvemlighedsårsager opskrives befolkningsstørrelsen på logaritmisk form herunder.

$$\ln N_t = \ln N = \bar{N} \quad (2.5)$$

Afslutningsvis vil vi betragte relationen for det produktivetsforstærkende element, A . På aggregeret niveau kaldes $A^{1-\alpha}$ for totalfaktorproduktiviteten (herefter blot TFP) eller Solow-residualen. TFP er residualbestemt som den andel af produktionen, der ikke kan forklares ved de eksplicite faktorer i produktionsfunktionen. Som TFP indgår i produktionsfunktionen kaldes den labor-augmenting eller Harrodsneutral. Det er ikke af central betydning, hvordan TFP indgår i produktionsfunktionen⁴, men vi vil, som tidligere nævnt, fortolke A som et produktivetsfremmende element for arbejdskraften. I størstedelen af RBC-teorien antages A at være udtryk for teknologi, hvilket også er tilfældet i denne model.

³ En gennemgang med en konstant befolkningsvækstrate kan findes i Romer (2001), s. 175-186

⁴ Kilde: Jones (1998) s. 32.

Det antages, at den teknologiske udvikling fluktuerer omkring en trendvækst givet eksogent ved g . De eksogene stød til teknologien der bevirker, at den faktiske værdi afviger fra trendværdien, bestemmes ud fra en autoregressiv proces, som vi her vil antage er af 1. orden.

$$\ln A_t = \bar{A} + g \cdot t + \tilde{A}_t \quad (2.6)$$

$$\tilde{A}_t = \rho_A \cdot \tilde{A}_{t-1} + \varepsilon_{A,t}, \quad \rho_A \in]-1; 1[\quad (2.7)$$

\tilde{A}_t kan fortolkes som teknologiens afvigelse fra sin trendværdi i periode t . Det ses af ligning (2.7), at \tilde{A}_t indeholder en irregulær komponent, $\varepsilon_{A,t}$, som er en hvid støj⁵ og den egentlige stødgenerator. I samme ligning beskriver ρ_A graden af autokorrelation i processen. Man må forvente at ρ_A er positiv, hvilket er et udtryk for træghed i processen, og at effekten af et stød til teknologien kun gradvist dør ud. Vi vil vende tilbage til relationernes betydning for modellens resultater i afsnit 5.2 og 5.3. Vi vil nu vende os mod den del af modellens mikrofundament, der beskriver forbrugerne.

2.3 Forbrugerne

Vi vender nu blikket mod forbrugerne i økonomien. Vi antager, at der i økonomien er N identiske forbrugere, der alle søger at maksimere deres nytte. Vi antager endvidere, at forbrugerne lever uendeligt længe. Denne antagelse er selvsagt ikke realistisk, men er en enkel måde at modellere generationsproblematikken, nemlig at generationer uddør og nye fødes. Ved at modellere nyttefunktionen som nedenfor, hvor vi antager uendelig levetid, får vi implicit indarbejdet skiftende generationer. Det sker implicit ved den simple antagelse, at nulevende generationer bekymrer sig om de kommende generationer, og derfor også tillægger deres forbrug og fritid positiv nytte i deres egen nyttefunktion. Da alle forbrugerne i økonomien er identiske, kan vi betragte *den repræsentative forbruger*⁶. Forbrugeren ønsker at maksimere den *forventede* værdi af nedenstående nyttefunktion, da der er usikkerhed omkring fremtiden.

$$U = \sum_{t=0}^{\infty} u(c_t, 1-l_t) \cdot e^{-\rho t}, \quad \rho \geq 0 \quad (2.8)$$

Det ses, at nytten for forbrugeren afhænger dels af privatforbrug c_t og dels af fritid, idet l_t er et mål for forbrugers arbejdsindsats. Den tid forbrugeren har til rådighed i hver periode normeres til 1, og dermed opnås fritid svarende til $1 - l_t$. Dermed kan vi fortolke l_t som den brøkdel af forbrugers tid, hvor han vælger at arbejde, og $1-l_t$ som den andel af hans tid hvor han

⁵ $\varepsilon_{A,t} \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$, $\varepsilon_{A,t}$ i.i.d.

⁶ Pga. det faktum at alle forbrugerne er homogene, kan de derfor naturligvis "repræsentere" hinanden. I det følgende anvendes blot betegnelsen "forbrugeren" af bekvemmelighedsårsager.

vælger at holde fri.

Forbrugeren diskonterer nytten i hver periode med raten ρ . For et $\rho > 0$, så vægtes nytte i forskellige perioder *ikke* ens. Da vægten hvormed en enkelt periodes nytte indgår i den samlede nytte falder med såvel voksende ρ som voksende t , så gælder at jo større diskonteringsrate ρ , jo mindre lægges vægt på fremtidigt forbrug og fritid i forhold til nutidigt forbrug og fritid. Desuden gælder det, at vægten hvormed en enkelt periodes nytte indgår i den samlede nytte bliver mindre, jo længere ude i fremtiden (jo større t). Således kan vi fortolke parameteren ρ som en utålmodighedsparameter; jo større ρ , jo mindre vægt lægges på fremtidigt forbrug, altså jo større grad af utålmodighed. Vi har antaget, at ρ ikke må være negativ, da det så ville være optimalt for forbrugeren at udskyde forbruget til uendelig tidshorisont, idet forbruget og fritid bliver mere og mere værd, jo længere ude i fremtiden. Det følger derfor, at et sådant problem ikke har nogen løsning; alt forbrug udskydes altså blot i uendelig fremtid, og uendelig stor nytte opnås.

Funktionen $u(\bullet)$ kaldes elementarnyttefunktionen, og her vil vi anvende følgende specifikt valgte funktionelle form:

$$u(c_t, 1-l_t) \equiv u_t = \ln c_t + \phi \ln(1-l_t) \quad (2.9)$$

Det bemærkes, at grænsenytten af såvel privatforbrug som fritid er positiv samt aftagende,

$$\text{idet } \frac{\partial u_t}{\partial c_t} = \frac{1}{c_t} > 0, \quad \frac{\partial u_t}{\partial(1-l_t)} = \frac{\phi}{1-l_t} > 0, \quad \frac{\partial^2 u_t}{\partial(c_t)^2} = -\frac{1}{(c_t)^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 u_t}{\partial(1-l_t)^2} = -\frac{\phi}{(1-l_t)^2} < 0.$$

For at færdiggøre opstillingen af forbrugers problem opstilles nu forbrugers intertemporale budgetbegrænsning:

$$w_0 l_0 + \sum_{t=1}^{\infty} w_t l_t \cdot \left(\prod_{\tau=1}^t (1+r_\tau)^{-1} \right) = c_0 + \sum_{t=1}^{\infty} c_t \cdot \left(\prod_{\tau=1}^t (1+r_\tau)^{-1} \right) \quad (2.10)$$

Den intertemporale budgetbegrænsning udtrykker, at nutidsværdien af forbruget i alle perioder ikke kan overstige nutidsværdien af lønindkomsten i alle perioder. Bemærk at vi har antaget, at lønindkomst er den eneste form for indkomst forbrugeren har. Da der er fuldkommen konkurrence i økonomien, tjener virksomhederne ingen profit⁷, og derfor tjener forbrugerne ingen indkomst fra denne kant. Initialformue er for enkelthedens skyld antaget at være lig nul. Dermed ser forbrugers problem ud som følger^{8,9}:

⁷ Jf. afsnit 2.1.

⁸ Det kan virke lidt tilfældigt, at vi har anvendt kontinuert diskontering i nyttefunktionen og anvender diskret diskontering i den intertemporale budgetrestriktion. Baggrunden for valget er alene af teknisk karakter, og læseren bør derfor ikke bruge tid på at stejle over den økonomiske fortolkning af valget.

⁹ Bemærk i det nedenstående, at E_t betegner forventningsoperatoren, således at $E_t[a_{t+1}]$ betegner forventningen på tidspunkt t til størrelsen a på tidspunkt $t+1$.

$$\max_{\{c_t, l_t\}_{t=0}^{\infty}} E_t \left[\sum_{t=0}^{\infty} u(c_t, 1-l_t) \cdot e^{-\rho t} \right] \quad (2.11)$$

$$s.t. \quad w_0 l_0 + \sum_{t=1}^{\infty} w_t l_t \cdot \left(\prod_{\tau=1}^t (1+r_{\tau})^{-1} \right) = c_0 + \sum_{t=1}^{\infty} c_t \cdot \left(\prod_{\tau=1}^t (1+r_{\tau})^{-1} \right) \quad (2.12)$$

Bemærk at de fremtidige realrenter er ukendte for forbrugeren, ligesom reallønnen også er det. Altså består problemet i at vælge en forbrugs- og arbejdsudbudsprofil $\{c_t, l_t\}_{t=0}^{\infty}$, der maksimerer forventningen til nutidsværdierne af nytterne i samtlige kommende perioder.

Vi vil i de kommende afsnit beskæftige os med tre aspekter af forbrugers problem. Afsnittene tjener som basis for afsnit 3, hvor vi skal bruge nogle af de i de kommende afsnit udledte relationer til at løse modellen. Desuden giver gennemgangen af de tre kommende underafsnit en bedre intuitiv forståelse af forbrugernes forbrugs- og arbejdsudbudsvalg, hvilket vil lette forståelsen af resultaterne i de efterfølgende afsnit. Først ser vi på bestemmelsen af arbejdsudbuddet og intertemporal substitution i arbejdsudbuddet. Dernæst tages fat på optimering af forbrugsprofilen over tid, og sidst betragtes afvejningen mellem forbrug og fritid¹⁰.

2.3.1 Arbejdsudbudsbeslutning

Først ser vi som sagt nærmere på forbrugers valg af arbejdsudbudsbeslutning. Vi ønsker at analysere, hvorledes forbrugeren allokerer sin fritid intertemporalt. Til dette ser vi forsimplende på forbrugers t_0 -periodes arbejdsudbudsbeslutning:

$$\begin{aligned} \max_{c_1, c_2, l_1, l_2} & \ln c_1 + \phi \ln(1-l_1) + e^{-\rho} \cdot (\ln c_2 + \phi \ln(1-l_2)) \\ s.t. & c_1 + \frac{c_2}{1+r} = w_1 l_1 + \frac{w_2 l_2}{1+r} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Vi opstiller Lagrangefunktionen:

$$L = \ln c_1 + \phi \ln(1-l_1) + e^{-\rho} \cdot (\ln c_2 + \phi \ln(1-l_2)) - \lambda \cdot \left(c_1 + \frac{c_2}{1+r} - w_1 l_1 - \frac{w_2 l_2}{1+r} \right) \quad (2.14)$$

Vi har hermed et maksimeringsproblem i 4 variable. Det viser sig dog, at for at kunne sige noget om intertemporal substitution i arbejdsudbuddet, så får vi kun brug for førsteordensbetingelserne med hensyn til l_1 og l_2 :

$$\frac{\phi}{1-l_1} = \lambda w_1 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{\phi}{w_1(1-l_1)} \quad (2.15)$$

$$\frac{e^{-\rho} \phi}{1-l_2} = \frac{\lambda w_2}{1+r} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{e^{-\rho} \phi}{1-l_2} \cdot \frac{1+r}{w_2} \quad (2.16)$$

¹⁰ Udledningerne i det kommende afsnit følger til en vis grad udledningerne i Romer (2001) s. 176-180

Ved at udnytte disse to ligninger fås:

$$\frac{e^{-\rho} \phi}{1-l_2} \cdot \frac{1+r}{w_2} = \frac{\phi}{w_1(1-l_1)} \Leftrightarrow \frac{1-l_1}{1-l_2} = \frac{w_2}{w_1} \cdot \frac{1}{e^{-\rho}(1+r)} \quad (2.17)$$

Nu ser vi, at arbejdsudbudsbeslutningen afhænger af reallønnen i de to perioder, eller mere specifikt af den relative realløn. Hvis for eksempel den relative realløn målt som w_2/w_1 stiger, så vil forbrugeren justere sin arbejdsudbudsbeslutning således, at han vælger at øge raten $\frac{1-l_1}{1-l_2}$, hvilket svarer til, at man vælger en større mængde fritid periode 1 relativ til periode 2. Dette virker intuitivt rimeligt, da man vælger at lægge en stor del af sin arbejdsindsats i den periode, hvor reallønnen er relativt høj. Prisen på fritid er alternativomkostningen ved ikke at arbejde, altså reallønnen. Derfor vælger forbrugeren at forbruge en relativ stor mængde fritid i den periode, hvor reallønnen netop er lav. Bemærk at en stigning i realrenten svarer til et fald i værdien af den relative realløn. Derfor vil en stigning i realrenten tendere mod, at man vælger et større relativt arbejdsudbud i periode 1. Dette er også intuitivt rimeligt, idet det da bliver mere fordelagtigt for forbrugeren at arbejde periode 1 og så spare en del af sin arbejdsindkomst op frem for at arbejde mere i periode 2.

2.3.2 Optimering af forbrugsprofil under usikkerhed

Målet med dette afsnit er at udlede en optimal forbrugsprofil for forbrugeren. Selv denne simple model er ganske kompliceret at løse eksplicit, således at der opnås en ligning for forbruget i periode t som funktion af diverse parametre. Derfor er idéen i stedet at udlede en ligning for udviklingen i forbruget. En sådan implicit løsning, der beskriver væksten i forbruget frem for forbrugets niveau, kaldes en Eulerligning. Det er en sådan vi i det følgende søger at udlede.

Da vi her fokuserer alene på forbrugsprofilen, så er problemet vi søger at løse:

$$\max_{\{c_t\}_{t=0}^{\infty}} E_t \left[\sum_{t=0}^{\infty} u(c_t, 1-l_t) \cdot e^{-\rho t} \right] \quad (2.18)$$

$$s.t. \quad w_0 l_0 + \sum_{t=1}^{\infty} w_t l_t \cdot \left(\prod_{\tau=1}^t (1+r_{\tau})^{-1} \right) = c_0 + \sum_{t=1}^{\infty} c_t \cdot \left(\prod_{\tau=1}^t (1+r_{\tau})^{-1} \right) \quad (2.19)$$

Formelt er problemet et dynamisk programmeringsproblem med uendelig tidshorisont, og er derfor noget kompliceret at løse. Vi vil her anvende en mere uformel og intuitiv tilgang til problemstillingen.

Betragt forbrugeren, der står i periode t . Vi antager, at han reducerer sit forbrug i periode t med Δc enheder og bruger den herved opnåede ekstra indkomst til at forøge sit forbrug i

periode $t+1$. Hvis den valgte forbrugsprofil er optimal, så må det være således, at en sådan ændring ikke ændrer på den samlede nytte ved en marginal ændring. Vi sætter derfor det marginale nytte tab ved at mindske forbruget i periode t med Δc enheder lig med den *forventede* marginale nyttestigning ved at forhøje forbruget i periode $t+1$ med den ved ændringen opnåede ekstra indkomst. Altså:

*Marginal nytteomkostning ved at sænke forbruget i periode t med Δc =
 Marginal Nyttestigning ved at hæve forbruget i periode $t+1$ tilsvarende*

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial c_t} \cdot \Delta c_t &= E_t \left[\frac{\partial U}{\partial c_{t+1}} \cdot \Delta c_{t+1} \right] \Rightarrow e^{-\rho t} \cdot \frac{1}{c_t} \cdot \Delta c = E_t \left[e^{-\rho(t+1)} \cdot \frac{1}{c_{t+1}} \cdot (1+r_{t+1}) \cdot \Delta c \right] \Rightarrow \\ e^{-\rho t} \cdot \frac{1}{c_t} \cdot \Delta c &= e^{-\rho t} \cdot e^{-\rho} \cdot E_t \left[\frac{1}{c_{t+1}} \cdot (1+r_{t+1}) \right] \cdot \Delta c \Rightarrow \\ \frac{1}{c_t} &= e^{-\rho} \cdot E_t \left[\frac{1}{c_{t+1}} \cdot (1+r_{t+1}) \right] \end{aligned} \quad (2.20)$$

Ligning (2.20) er Eulerligningen for modellen. Afvejningen mellem nutidigt og fremtidigt forbrug afhænger således af marginalnyttens af nutidigt forbrug, den forventede marginalnytte af fremtidigt forbrug og forventningen til den fremtidige realrente samt diskonteringsraten ρ . Bemærk, at afvejningen også afhænger af samspillet mellem forventet marginalnytte af fremtidigt forbrug og realrenten, idet:

$$\frac{1}{c_t} = e^{-\rho} \cdot \left(E_t \left[\frac{1}{c_{t+1}} \right] \cdot E_t [1+r_{t+1}] + \text{cov} \left(\frac{1}{c_{t+1}}, (1+r_{t+1}) \right) \right) \quad (2.21)$$

Dersom der er en samvariation mellem fremtidigt forbrug og realrente, så vil det påvirke forbrugsprofilen. Hvis eksempelvis denne kovarians er negativ, så betyder det, at afkastet af opsparing (renten) er høj, når marginalnyttens af forbrug er lav. Det gør opsparing mindre attraktivt i forhold til en situation, hvor kovariansen er nul, og øger dermed det nutidige forbrug.

Læg mærke til betydningen af parameteren ρ . Hvis ρ stiger, så ændres forbrugsprofilen således, at nutidigt forbrug stiger relativt til fremtidigt forbrug¹¹. Dette passer også fint med vores fortolkning af ρ som utålmodighedsparameter. Da forbrugeren er blevet mere utålmodig, lægger han nu mindre vægt på fremtidigt forbrug, og ønsker følgelig at ændre sin forbrugsprofil i retning mod en større relativ mængde nutidigt forbrug.

¹¹ Fortolkningen af en stigning i ρ er lettere eksotisk, men må være noget i retning af, at forbrugeren vågner op en morgen, ser sig selv i spejlet og siger til sig selv: "jeg er godt nok blevet mere utålmodig i løbet af natten".

2.3.3 Afvejningen mellem fritid og forbrug

I dette afsnit ser vi nærmere på afvejningen mellem fritid og forbrug. Da vi opstillede forbrugers problem i afsnit 2.3.2, så vi også, at forbrugeren ikke alene skulle vælge en optimal forbrugsbane, men også hvor meget han ønsker at arbejde. Der er naturligvis en tæt sammenhæng mellem de to størrelser, da hele forbrugers indkomst tjenes som arbejdsindkomst. Derfor ligger der et klart tradeoff: Hvis forbrugeren vælger at arbejde mindre, så må han nødvendigvis også mindske sit forbrug for givne priser. Dette ses tydeligt af den intertemporale budgetrestriktion (2.19).

Vi ønsker derfor at kunne sige noget om i hvilket forhold, forbrugeren afvejer de to goder, fritid og forbrug. Igen vil vi anvende den mere intuitive tilgang til dette problem frem for dynamisk programmering.

Vi betragter en situation, hvor vi antager, at forbrugeren vælger at forøge sit arbejdsudbud i periode t med Δl_t , og anvende den derved opnåede ekstra indkomst til at forøge sit forbrug i samme periode. Hvis forbrugeren vælger optimalt, så må det gælde, at en sådan ændring ikke påvirker hans samlede nytte ved en marginal ændring. For hvis det ikke var tilfældet, ville forbrugeren kunne opnå større nytte ved at vælge anderledes. Hvis eksempelvis disnyttens ved at hæve arbejdsudbuddet var mindre end den nyttegevinst, der kunne opnås på denne måde ved at anvende den ekstra indkomst til at øge forbruget, da ville forbrugeren kunne opnå større nytte ved at ændre sin beslutning i retning af at arbejde og dermed forbruge mere. Dette ville forbrugeren gøre indtil det punkt, hvor det nøjagtigt gælder, at disnyttens ved at hæve arbejdsudbuddet er lig med nyttegevinsten ved at anvende den derved opnåede ekstra indkomst til at hæve forbruget.

Vi sætter således disnyttens ved at hæve arbejdsudbuddet lig med nyttegevinsten ved at kunne hæve forbruget. Det bemærkes, at det ekstra forbrug der kan opnås ved at hæve arbejdsudbuddet med Δl_t , er givet ved $\Delta c_t = w_t \cdot \Delta l_t$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial(1-l_t)} \cdot \Delta l_t &= \frac{\partial U}{\partial c_t} \cdot \Delta c_t \quad \Rightarrow \quad e^{-\rho t} \frac{\phi}{1-l_t} \Delta l_t = e^{-\rho t} \frac{1}{c_t} w_t \Delta l_t \quad \Rightarrow \quad \frac{\phi}{1-l_t} = \frac{1}{c_t} w_t \quad \Rightarrow \\ \frac{c_t}{1-l_t} &= \frac{w_t}{\phi} \end{aligned} \tag{2.22}$$

Dermed har vi fundet frem til en relation, der beskriver sammenhængen mellem valg af forbrug og fritid i periode t . Bemærk at ligningen reelt set blot svarer til det sædvanlige resultat fra mikroteorien om, at i optimum sætter forbrugeren sit marginale substitutionsforhold lige med det relative prisforhold. Dette svarer præcis til fremgangsmåden ovenfor, blot på en lidt mere intuitiv forståelig måde, men resultatet bliver naturligvis det samme:

$$\left| MRS_{c_t, l_t} \right| \equiv \frac{MU_{c_t}}{MU_{l_t}} \equiv \frac{\partial U / \partial c_t}{\partial U / \partial (1-l_t)} = \frac{P_{c_t}}{P_{1-l_t}} \Rightarrow$$

$$\frac{e^{-\rho t} \cdot \frac{1}{c_t}}{e^{-\rho t} \cdot \frac{\phi}{1-l_t}} = \frac{1}{w_t} \Rightarrow \frac{1-l_t}{\phi \cdot c_t} = \frac{1}{w_t} \Rightarrow \frac{c_t}{1-l_t} = \frac{w_t}{\phi}$$

Det ses af resultatet, at hvis eksempelvis reallønnen stiger, så vil forbrugeren respondere ved at substituere over mod at forbruge en større relativ andel forbrug i forhold til fritid, da en lønstigning jo svarer til en stigning i prisen på fritid. Bemærk også betydningen af parameteren ϕ . Det ses af nyttefunktionen, at en stigning i denne parameter svarer til, at forbrugeren vægter fritid mere relativt til forbrug i sin nytte. Derfor er det også intuitivt rimeligt, at et større ϕ betyder en mindre relativ mængde forbrug i forhold til fritid, idet denne præferenceparameter netop udtrykker, at man vægter forbrug relativt svagere.

Dette afslutter behandlingen af forbrugeren, og vi vil i næste afsnit løse den aggregerede model væbnet med resultaterne fra dette afsnit.

3 Løsning af modellen

Efter af have beskrevet virksomhederne og forbrugernes adfærd samt de strukturelle forhold i økonomien, vil vi nu opstille og udlede løsningen for modellen. Vi vil vælge at tage to forskellige tilgange til at løse modellen. Først ser vi på markedsligevægten i denne økonomi. Dernæst ser vi på den Pareto optimale løsning, i form af en samfundsplanlægger, der maksimerer den samlede nytte i økonomien. Derpå vil vi sammenligne de to, og undersøge om der er sammenfald mellem resultaterne i de to tilfælde.

Løsningen af modellen fokuserer på sammensætningen af to variable, opsparingskvoten s_t , og arbejdsudbuddet l_t . Derfor søger vi at få omskrevet modellen til at udtrykke noget om disse to variable.

3.1 Markedsligevægten

For at udlede markedsligevægten, får vi brug for de udledte adfærdsrelationer fra afsnit 2.3¹². Vi tager udgangspunkt i to af de udledte optimalitetsbetingelser for forbrugeren, nemlig (2.20) og (2.22). Indledningsvis skal vi bruge (2.20), og desuden skal vi bruge udtrykket (2.3)

¹² Dette afsnit følger i grove træk fremstillingen i Romer (2001) s. 181-183

for realrenten samt de to identiteter: $c_t = (1-s_t) \frac{Y_t}{N}$ og $K_{t+1} = s_t Y_t$.¹³ Dermed fås ved at omskrive (2.20):

$$\begin{aligned} -\ln\left((1-s_t) \frac{Y_t}{N}\right) &= -\rho + \ln E_t \left[\frac{1+r_{t+1}}{(1-s_{t+1}) \cdot \frac{Y_t}{N}} \right] = -\rho + \ln E_t \left[\frac{\alpha Y_{t+1}}{K_{t+1} (1-s_{t+1}) \cdot \frac{Y_t}{N}} \right] \\ &= -\rho + \ln E_t \left[\frac{\alpha N}{s_t Y_t (1-s_{t+1})} \right] \Rightarrow -\ln(1-s_t) = -\rho + \ln \alpha - \ln s_t + \ln E_t \left[\frac{1}{1-s_{t+1}} \right] \end{aligned}$$

I udtrykket indgår kun opsparingskvoten s som tidsafhængig. Ergo må der være en konstant opsparingskvote \hat{s} , der løser denne ligning. Ved at indsætte $s_t = s_{t+1} = \hat{s}$ i dette udtryk fås et udtryk for denne konstante opsparingskvote:

$$\hat{s} = \alpha \cdot e^{-\rho} \quad (3.1)$$

Vi ser nu nærmere på arbejdsudbuddet. Her anvender vi ligning (2.22), hvor vi tager logaritmer, og igen anvender at $c_t = (1-s_t) \frac{Y_t}{N}$ samt udtryk (2.3) for reallønnen:

$$\begin{aligned} \ln\left[(1-\hat{s}) \frac{Y_t}{N}\right] - \ln(1-\hat{l}_t) &= \ln\left(\overbrace{(1-\alpha) \frac{Y_t}{l_t \cdot N}}^{w_t}\right) - \ln \phi \Rightarrow \\ \ln l_t - \ln(1-l_t) &= \ln(1-\alpha) - \ln(1-\hat{s}) - \ln \phi \Rightarrow l_t = \hat{l} = \frac{1-\alpha}{(1-\alpha) + \phi \cdot (1-\hat{s})} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Således er også arbejdsudbuddet konstant. Det må siges at være to opsigtsvækkende resultater modellen giver, at såvel opsparingskvote som beskæftigelse er konstant.

At opsparingskvoten er konstant er overraskende, da husholdningerne maksimerer deres intertemporale nytte, og derfor principielt har mulighed for at lade deres opsparing afhænge af realrenten, hvilket vil være intuitivt rimeligt. At den er konstant skal imidlertid ikke ses som en generel egenskab ved RBC-modeller, men blot som et udtryk for det meget specifikke valg af funktionelle former vi har valgt, der gør, at substitutionseffekten ved en renteændring nøjagtigt svarer til indkomsteffekten. Det er kombinationen af Cobb-Douglas produktionsfunktionen, log-lineær nyttefunktion samt 100% afskrivninger i hver periode, der gør at opsparingskvoten bliver konstant¹⁴. Dermed efterlader en renteændring opsparingen upåvirket.

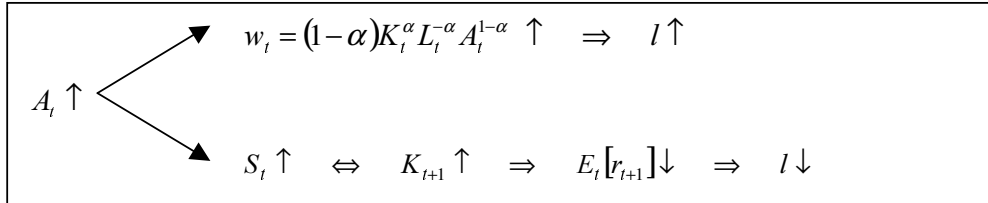
At beskæftigelsen, og dermed også de enkelte individers arbejdsudbud er konstant, er også umiddelbart overraskende, da der også her optimeres intertemporalt, således at forbrugerne har mulighed for at substituere arbejdsudbud mellem perioder. Grunden er igen, at der er to effekter, der i dette specifikke tilfælde netop udligner hinanden. Hvis der fx betragtes en

¹³ Både i udtrykket for realrenten og denne identitet udnyttes, at $\delta = 1$.

¹⁴ Kilde: Romer (2001), s. 181.

situation, hvor der er en midlertidig stigning i A_t , altså et positivt teknologistød, så vil der være to effekter på forbrugernes arbejdsudbud. Den ene effekt påvirker via reallønnen, og den anden via realrenten:

Boks 3.1 – Effekt på arbejdsudbud af et positivt teknologisk stød



Som det fremgår af boks 3.1, er der to modsatrettede effekter på arbejdsudbuddet. At lønnen stiger pga. det positive teknologichok får alt andet lige arbejdsudbuddet til at stige. Den modsatrettede effekt går på at den øgede opsparing, som følge af det positive teknologichok, skaber forventning om en lavere fremtidig realrente, og det får arbejdsudbuddet til at falde, da det ikke længere er så attraktivt at spare op. I dette specifikke tilfælde vi betragter, viser det sig altså, at de to effekter præcist ophæver hinanden.

Det er i øvrigt værd at bemærke, at der i ligevægt gælder, at en øget vægt på fritid i nyttefunktionen, dvs. en større ϕ , betyder et lavere arbejdsudbud, hvilket må siges at være intuitivt fornuftigt.

Efter at have fundet og behandlet markedsligevægten, vil vi i næste afsnit se nærmere på den socialt optimale ligevægt i økonomien. Vi vil undersøge, om konklusionerne fra markedsligevægten kan genfindes under løsningen af den socialt optimale ligevægt.

3.2 Løsning for socialt optimum

Vi vil nu udlede den Pareto optimale løsning udtrykt ved en godgørende og alvidende samfundsplanlægger. Samfundsplanlæggeren ønsker at maksimere den samlede nytte for alle økonomiens agenter. Da alle forbrugere i økonomien antages at have samme nyttefunktion, så kan vi optimere ved at indsætte samlet forbrug og samlet arbejdsudbud i nyttefunktionen, men hvor den samlede tid til rådighed tilsvarende normeres til 1. Bemærk, at vi derfor nu bruger notationen C_t for samlet forbrug til forskel fra c_t (forbrug pr. capita). Notationen for arbejdsudbuddet bibeholdes imidlertid som l_t , da denne blot har en fortolkning svarende til den procentdel af tiden, hvori den repræsentative agent vælger at arbejde.

Der er tale om et dynamisk programmeringsproblem, idet der er intertemporal afhængighed. Vi definerer nu værdifunktionen $V(K_t, A_t)$ som den forventede nutidsværdi af den

fremtidige nytte¹⁵. Det vil sige, at funktionen $V(K_t, A_t)$ beskriver den forventede værdi af alle de fremtidige nytter fra periode t til ∞ , når forbruget i hver periode vælges optimalt. Derfor må det gælde, at værdifunktionen kan skrives som:

$$V(K_t, A_t) = \max_{C_t, I_t} \left\{ \ln C_t + \phi \cdot \ln(1 - I_t) + e^{-\rho} \cdot E_t [V(K_{t+1}, A_{t+1})] \right\} \quad (3.3)$$

Ideen er, at man maksimerer nytten af nytten i periode t plus den diskonterede værdi af forventningen til værdifunktionen i næste periode ($t+1$). Hvis denne indsættes, fås et udtryk der afhænger af forventningen til værdifunktionen i periode $t+2$, og på denne måde opnås det dynamiske problem. Ligning (3.3) er kendt som *Bellman ligningen*. Vi leder efter en løsning for værdifunktionen V . Vi anvender en lidt uformel tilgang, idet vi følger Romer og gætter på, at værdifunktionen vil tage formen¹⁶:

$$V(K_t, A_t) = \beta_0 + \beta_K \cdot \ln K_t + \beta_A \cdot \ln A_t \quad (3.4)$$

Desuden udnyttes følgende to relationer:

$$K_{t+1} = K_t - \delta \cdot K_t + I_t = K_t - K_t + (Y_t - C_t) = Y_t - C_t \quad (3.5)$$

$$E_t [\ln A_{t+1}] = \rho_A \cdot \ln A_t \quad (3.6)$$

Ligning (3.5) er blot en identitet for en lukket økonomi, der beskriver at kapitalapparatet i periode $t+1$ er lig opsparingen i periode t , da al kapitalapparat i periode t er nedslidt i periode $t+1$. Ligning (3.6) er udledt i specialtilfældet med $\bar{A} = g = 0$ ¹⁷. De to relationer substitueres ind i Bellman ligningen, hvor forventningsoperatoren kan løftes:

$$\begin{aligned} V(K_t, A_t) &= \max_{C_t, I_t} \left\{ \ln C_t + \phi \cdot \ln(1 - I_t) + e^{-\rho} E_t [\beta_0 + \beta_K \cdot \ln(Y_t - C_t) + \beta_A \rho_A \ln A_t] \right\} \Rightarrow \\ V(K_t, A_t) &= \max_{C_t, I_t} \left\{ \ln C_t + \phi \cdot \ln(1 - I_t) + e^{-\rho} (\beta_0 + \beta_K \cdot \ln(Y_t - C_t) + \beta_A \cdot \rho_A \cdot \ln A_t) \right\} \end{aligned} \quad (3.7)$$

For at optimere udledes først førsteordensbetingelsen mht. C_t , der omskrives til at give et udtryk for forbrugskvoten¹⁸:

$$\begin{aligned} \frac{1}{C_t} + e^{-\rho} \cdot \beta_K \cdot \frac{1}{Y_t - C_t} \cdot (-1) &= 0 \Rightarrow \frac{1}{C_t} = e^{-\rho} \cdot \beta_K \cdot \frac{1}{Y_t - C_t} \\ \frac{1}{C_t} = e^{-\rho} \beta_K \frac{1}{Y_t - C_t} &\Leftrightarrow \frac{C_t}{Y_t} = \frac{1}{1 + \beta_K e^{-\rho}} \end{aligned} \quad (3.8)$$

¹⁵ Gennemgangen er inspireret af problemstillingen i Romer (2001) s. 214-215 (Problem 4.11) samt gennemgangen i Arnold (2002) s. 77-80.

¹⁶ Gættet kvalificeres af det faktum, at modellen har en log-lineær struktur.

¹⁷ I forbindelse med den kommende sammenligning med markedsligevægten, kan det nævnes at denne antagelse ikke er afgørende, idet disse to størrelser ikke indgår under løsning af markedsligevægten.

¹⁸ C_t/Y_t – altså den del af produktionen der anvendes til forbrug i indeværende periode.

Vi ser af (3.8), at forbrugskvoten er konstant¹⁹, og derfor må det pr. definition gælde, at opsparensknoten \hat{s} også er konstant. Vi udleder opsparensknoten²⁰:

$$\hat{s} = \frac{Y_t - C_t}{Y_t} = 1 - \frac{C_t}{Y_t} = 1 - \frac{1}{1 + \beta_K e^{-\rho}} = \frac{\beta_K e^{-\rho}}{1 + \beta_K e^{-\rho}} \quad (3.9)$$

Efter nu at have behandlet førsteordensbetingelsen med hensyn til C_t , betragter vi nu førsteordensbetingelsen med hensyn til arbejdsudbuddet l_t . Her benyttes den anden førsteordensbetingelse ved at indsætte $Y_t - C_t = \hat{s} \cdot Y_t$, samt marginalproduktet af arbejdskraft:

$$\begin{aligned} -\frac{\phi}{1-L_t} + e^{-\rho} \cdot \beta_K \cdot \frac{1}{Y_t - C_t} \cdot (1-\alpha) \frac{Y_t}{L_t} &= 0 \Rightarrow \frac{\phi}{1-L_t} = \frac{e^{-\rho} \beta_K (1-\alpha)}{\hat{s} \cdot L_t} \Rightarrow \\ \frac{\phi}{1-l_t} &= \frac{(e^{-\rho} \beta_K + 1)(1-\alpha)}{l_t} \Rightarrow l_t = \hat{l} = \frac{1-\alpha}{\phi \cdot (1-\hat{s}) + (1-\alpha)} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Således finder vi, at også beskæftigelsen er konstant, helt som i markedsligevægten.

Altså får vi samlet set at de to forskellige tilgange, nemlig samfundsplanlæggerens løsning og markedsligevægten, giver samme resultat. Begge giver, at såvel opsparenskvote som arbejdsudbud er konstant.

Det er ganske specielt, at vi hermed har byggestenene til en konjunkturmodel, hvor markedsligevægten og den Pareto optimale løsning er ens. Det vil med andre ord sige, at økonomien til hver en tid befinder sig i en Pareto optimal tilstand. Endnu har vi ikke set, hvad modellen forudsiger med hensyn til bevægelser i produktionen. Vi kan dog allerede nu sige, at enhver svingning i eksempelvis produktion simpelthen vil være økonomiens Pareto optimale reaktion på eksogene påvirkninger.

At økonomien altid befinder sig i en Pareto optimal tilstand, uanset hvordan stokastikken i modellen opfører sig, er dog ikke overraskende. Det følger ganske enkelt af hele modellens natur. Modellen er opbygget fra mikroniveau med rationelle, optimerende agenter, og i fraværet af markedsfejl, så holder mikroteoriens første velfærdsteorem²¹, nemlig at markedsligevægten er Pareto optimal.

¹⁹ Uafhængig af K_t og A_t .

²⁰ Parametrene i udtrykket er naturligvis ikke magen til dem i markedsligevægten, da parameteren β_K ikke er defineret i markedsligevægts-setup'et.

²¹ Jf. fx Mas-Colell, Whinston & Green (1995) s. 549

3.3 Fluktuationer i produktion

Vi ser nu nærmere på, hvordan modellens konklusioner ser ud med hensyn til fluktuationer i produktionen Y_t . Når der normalt tales om konjunktursvingninger, så tænkes som regel først og fremmest på svingninger i BNP, og derfor er det naturligvis interessant at se, hvad modellen implicerer for bevægelser i produktionen.

Vi udnytter produktionsfunktionen, samt at $K_t = \hat{s}Y_{t-1}$ og $L_t = \hat{L}$:

$$\begin{aligned}\ln Y_t &= \alpha \cdot \ln(\hat{s}Y_{t-1}) + (1-\alpha) \cdot (\ln A_t + \ln \hat{L}) \quad \Rightarrow \\ \ln Y_t &= \alpha \ln \hat{s} + \alpha \ln Y_{t-1} + (1-\alpha)(\bar{A} + gt) + (1-\alpha)\tilde{A}_t + (1-\alpha)(\ln \hat{L})\end{aligned}\quad (3.11)$$

Vi nu definerer nu \tilde{Y}_t som forskellen mellem $\ln Y_t$, og den værdi $\ln Y_t$ ville antage, hvis \tilde{A}_t i hver periode var nul. Dermed kan vi fortolke \tilde{Y}_t som den ikke-trendmæssige komponent af produktionsudviklingen. \tilde{Y}_t kalder vi også for *output gap*'et, da det angiver det *gap*, der er mellem den faktuelle produktion i periode t , og den produktion der ville have været, hvis blot produktionen fulgte sin trendvækst uden nogen form for stokastiske stød. Vi finder en bevægelsesligning for \tilde{Y}_t :

$$\begin{aligned}\tilde{Y}_t &= \ln Y_t - \ln Y_t|_{\tilde{A}_t=0 \forall t} = \alpha \ln \hat{s} + \alpha \ln Y_{t-1} + (1-\alpha)(\bar{A} + gt) + (1-\alpha)\tilde{A}_t + (1-\alpha)(\ln \hat{L}) - \\ &\alpha \ln \hat{s} - \alpha \ln Y_{t-1}|_{\tilde{A}_t=0 \forall t} - (1-\alpha)(\bar{A} + gt) - (1-\alpha)(\ln \hat{L}) \quad \Rightarrow \\ \tilde{Y}_t &= \alpha \ln Y_{t-1} - \alpha \ln Y_{t-1}|_{\tilde{A}_t=0 \forall t} + (1-\alpha)\tilde{A}_t = \alpha \tilde{Y}_{t-1} + (1-\alpha)\tilde{A}_t\end{aligned}\quad (3.12)$$

Vi indsætter udtrykket for \tilde{A}_t :

$$\tilde{Y}_t = \alpha \tilde{Y}_{t-1} + (1-\alpha)(\rho_A \tilde{A}_{t-1} + \varepsilon_{A,t})\quad (3.13)$$

Vi lagrer (3.12) én periode, isolerer for \tilde{A}_{t-1} og indsætter i (3.13):

$$\begin{aligned}\tilde{Y}_{t-1} &= \alpha \tilde{Y}_{t-2} + (1-\alpha)\tilde{A}_{t-1} \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{A}_{t-1} = \frac{1}{1-\alpha}(\tilde{Y}_{t-1} - \alpha \tilde{Y}_{t-2}) \quad \Rightarrow \\ \tilde{Y}_t &= \alpha \tilde{Y}_{t-1} + \rho_A (\tilde{Y}_{t-1} - \alpha \tilde{Y}_{t-2}) + (1-\alpha)\varepsilon_{A,t} = (\alpha + \rho_A)\tilde{Y}_{t-1} - \alpha \rho_A \tilde{Y}_{t-2} + (1-\alpha)\varepsilon_{A,t}\end{aligned}\quad (3.14)$$

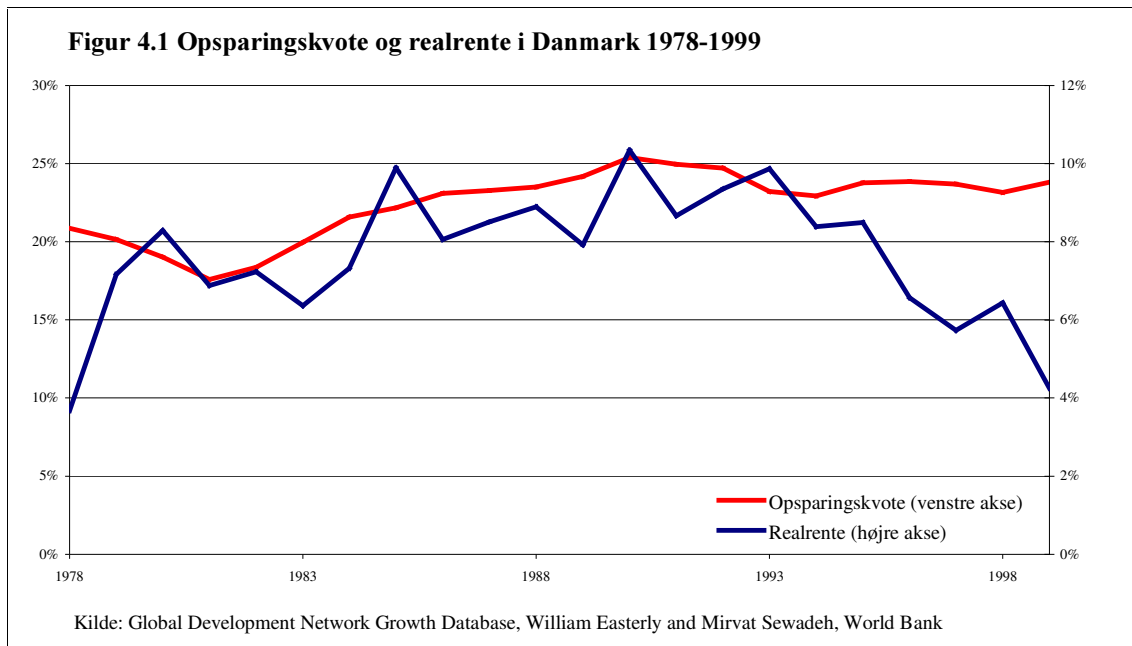
Vi har således nu fundet frem til, at modellen implicerer, at udviklingen i output gap'et følger en anden ordens autoregressiv proces. Dvs. at udsving i produktionen fra trend-niveauet afhænger af de udsving, der var i de to foregående perioder samt en hvid støj. Vi vender tilbage til at behandle output gap'et i afsnit 5, hvor vi også vil sammenholde ligning (3.14) med empiri. Inden da vil vi i afsnit 4 undersøge tre centrale resultater fra modelløsningen empirisk.

4 Empiri

I dette afsnit ønsker vi at teste modellens plausibilitet empirisk. Vi har valgt ikke at kalibrere hele modellen, men at teste udvalgte egenskaber ved modellen, nemlig at opsparingskvoten er konstant, at arbejdsudbuddet er konstant samt at reallønnen, som vi senere vil se, viser sig at være meget procyklisk. Da en række af modellens antagelser er ganske restriktive, må det forventes, at der er en del uoverensstemmelser mellem modellens resultater og empiri.

4.1 Opsparingskvote

Vi fandt i ligning (3.1), at den repræsentative forbrugers opsparingskvote, udgjorde en konstant andel af indkomsten. I figur 4.1 er den danske opsparingskvote i perioden 1978-1999 afbildet, og grafen indikerer, at opsparingskvoten dårligt kan antages at være konstant.



Vi husker, at opsparingskvoten viste sig at være konstant, da antagelser vedrørende forbrugers nyttefunktion, produktionsfunktion samt fuld nedslidning af kapitalapparatet medførte, at indkomst- og substitutionseffekt ved en renteændring udlignede hinanden. Betragtes igen figur 4.1 ser vi, at der er tegn på svag positiv korrelation mellem opsparingskvoten og realrenten. Dette understøttes af, at korrelationskoefficienten beregnes til 0,31. Signifikanssandsynligheden for et test om at korrelationskoefficienten er lig nul er 0,17. Altså kan vi på 5% niveau ikke afvise at opsparingskvoten og realrenten er ukorrelerede i den betragtede pe-

riode, men ikke desto mindre bekræftes altså tendensen til positiv korrelation mellem opsparingskvoten og realrenten.

En positiv korrelation mellem de to størrelser er et udtryk for, at substitutionseffekten dominerer indkomsteffekten. Ved en højere realrente bliver afkastet af opsparing større og fremtidigt forbrug relativt billigere i forhold til nutidigt forbrug. Substitutionseffekten vil føre til øget opsparing, da denne altid virker modsatrettet *prisændringen*²². Denne effekt lader således til at dominere indkomsteffekten af, at mindre opsparing nu kan opretholde et givent fremtidigt forbrugsniveau, og derfor isoleret set fører til mindre opsparing.

Det lader altså til, at den implicite antagelse om udlignende substitutions- og indkomsteffekt, der ligger til grund for resultatet vedrørende konstant opsparingskvote, er for restriktiv. Som tidligere bemærket, så er det kombinationen af log-lineær nyttefunktion, 100% nedslidningsrate og Cobb-Douglas produktionsfunktion, der bevirker, at opsparingskvoten er uafhængig af afkastet på opsparing, realrenten. Man bør derfor revurdere rimeligheden af disse antagelser. Især antagelsen vedrørende nedslidningsraten er højst urealistisk; dette behandles nærmere i afsnit 5.2. Endvidere kan man eksempelvis overveje at erstatte nyttefunktionen med en mere generel nyttefunktion af CES-typen. Det er vist i appendiks B, at den log-lineære nyttefunktion er et særtilfælde af en CES-nyttefunktion. Ændres antagelserne vedrørende nyttefunktionen og nedslidningen, vil opsparingskvoten kunne gøres rente- og derved tidsafhængig, hvilket vil give modellen større grad af frihed. Denne frihed vil dog komme på bekostning af muligheden for at løse modellen analytisk.

4.2 Arbejdsudbud

I det følgende vil vi betragte resultatet i ligning (3.2), nemlig at arbejdsudbudet er konstant. Hermed menes, at den andel af den samlede tid til rådighed for forbrugeren, hvor han vælger at arbejde, er konstant. Det skal på forhånd understreges, at der må forventes at være betragtelige uoverensstemmelser mellem modellens resultater og empiri. Dette forhold skyldes primært, at modellen er baseret på en antagelse fuldkommen konkurrence, men netop på arbejdsmarkedet er denne antagelse overordentlig urealistisk. Forhold som effektivitetsløbninger og market power på såvel udbuds- som efterspørgselssiden må forventes at have en stor betydning empirisk.

Endvidere kan det *sande* arbejdsudbud ikke observeres, idet et individs arbejdsudbud er privat information. Man har ikke grund til at forvente, at en rationel, egennytteoptimerende

²² Kilde: Varian (1999), s. 147

agent vil afsløre sin private information, såfremt agenten står til at vinde ved at handle anderledes. Eksempelvis kan ledige have incitament til at lyve om deres sande arbejdsudbud for at opnå adgang til sociale ydelser.

Vi kan imidlertid observere folks arbejdsindsats, men reelt bør man klart tage højde for, at husholdningerne i virkelighedens verden ikke enerådigt vælger deres arbejdsindsats. Arbejdsudbudet kan sagtens være konstant, selvom arbejdsindsatsen ikke viser sig at være det, idet en empirisk afvigelse fra modellens resultat oplagt kan skyldes fluktuationer i arbejdskraftefterspørgslen. I modellen skelnes ikke imellem arbejdsudbud og –indsats.

Disse væsentlige problemer til trods, vil vi alligevel anvende arbejdsindsatsen som approksimation for arbejdsudbudet. For at sammenligne resultatet om konstant arbejdsudbud med empiri anvender vi et korrigeret mål for beskæftigelsesgraden. Iflg. modellen bør antallet af beskæftigede og arbejdsstyrken være ens²³. En rimelig fortolkning i at disse to ikke er ens, og at der således er folk uden for beskæftigelse, kan være at slække på antagelsen om homogene forbrugere. Således har forbrugerne forskellige nyttefunktioner, og derfor vil det således være muligt at nogle folks præferencer dikterer, at de skal vælge et arbejdsudbud på nul. Dette behøver ikke at være i skarp kontrast med den postulerede nyttefunktion, hvis denne blot stadig udgør en rimelig gennemsnitlig repræsentation af forbrugerne i økonomien.

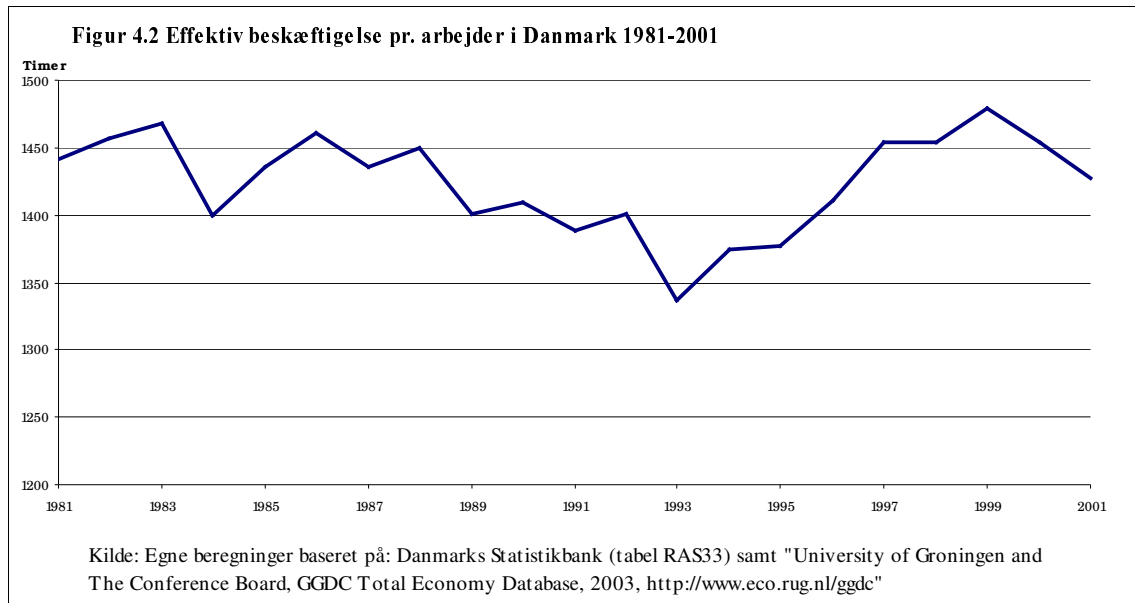
Vi anvender den årlige arbejdsindsats pr. beskæftiget, og ganger med beskæftigelsesgraden. Det mål vi vil anvende ser derfor ud som følger:

$$\text{Effektiv beskæftigelse pr. arbejder} = \text{gns. årlig arbtimer}_t \cdot \frac{\text{beskæftigede}_t}{\text{arbejdsstyrke}_t} \quad (4.1)$$

Således er (4.1) et udtryk for det gennemsnitlige årlige antal arbejdstimer pr. arbejder til rådighed for arbejdsmarkedet. I figur 4.2 er den effektive beskæftigelse pr. arbejder for Danmark i perioden 1981-2001 illustreret.

Det ses i figur 4.2, at den effektive beskæftigelse pr. arbejder kun i ringe grad kan antages at være konstant. Man aner en tendens til, at den effektive beskæftigelse pr. arbejder varierer procyklisk. Eksempelvis ses, at den effektive beskæftigelse pr. arbejder stiger pænt i løbet af 1990'erne; en periode med høj generel økonomisk vækst. I perioden 1993-1999 stiger den effektive beskæftigelse pr. arbejder med 1,7% p.a.. Således er resultatet om konstant arbejdsudbud næppe særligt realistisk empirisk.

²³ Beskæftigelsesgraden er lig 1, såfremt forbrugerne vælger at udbyde en strengt positiv mængde arbejdskraft. Af ligning (3.2) ses, at en forbruger der har den i denne model valgte nyttefunktion, vil vælge at udbyde en strengt positiv mængde arbejdskraft.



Én forklaring på forskellen mellem empiri og teori har fået særlig opmærksomhed. I modellen antages, at forbrugeren vælger sit arbejdsudbud i kontinuummet $[0,1]$ af sit tidsbeholdning. Hansen²⁴ betragter scenariet, hvor husholdningen kan vælge at udbyde nul enheder arbejdskraft eller et givet eksogent niveau, l_0 . Et argument for Hansens modifikation er, at der er faste omkostninger ved at være beskæftiget. Modellering af den mulige arbejdsudbudsmængde som diskrete mængder kan også fortolkes som givne strukturer på arbejdsmarkedet, idet arbejdskraft i virkeligheden oftest efterspørges i forhold til fuld- og deltidsstillinger. Det er derfor rimeligt at antage, at den repræsentative forbruger ikke har kontinuert arbejdsudbud som i den betragtede model, men derimod har en begrænset mulighedsmængde²⁵. Hansen finder, at arbejdsudbud i diskret(e) mængde(r) øger volatiliteten i arbejdskraftinputtet²⁶ og derved muliggør større fluktuationer i eksempelvis output for givne stød til teknologien. Ud over den direkte effekt kan stød til teknologien ved Hansens modellering, have mulighed for at forplante sig til output indirekte via fluktuationer i arbejdskraftinputtet. Det bevirker, at fluktuationer i output kan opstå gennem stød til beskæftigelsen. Det vil eliminere noget af det forklaringspres der ligger på residuelementet i modellen. Vi vil i afsnit 5.2 og 5.3 se, at det er en ønskværdig egenskab, at inddrage andre potentielle kilder til fluktuationer end den direkte effekt fra teknologistød.

²⁴ Kilde: Kydland (1995), s. 143-144.

²⁵ Det er ydermere muligt at udbygge modifikationen til at indeholde valg mellem n forskellige niveauer for arbejdsudbud, $\{l_i\}_{i=0}^n$.

²⁶ I vores model er der ingen volatilitet i arbejdskraftinputtet, og derfor vil en sådan ændring skabe volatilitet i arbejdskraftinputtet.

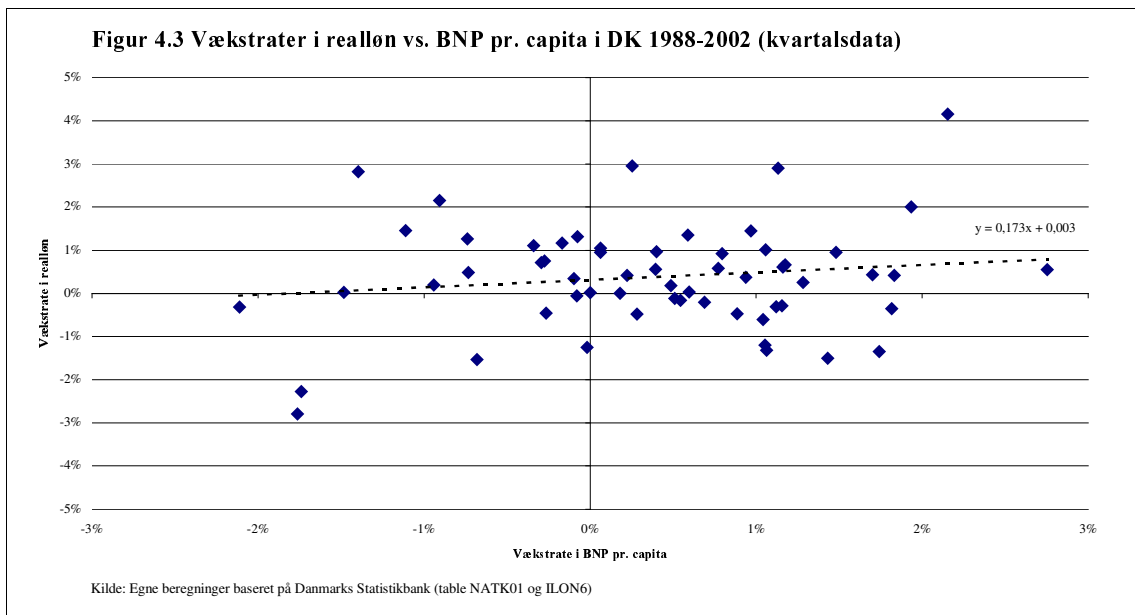
Altså kan det konkluderes, at modellens antagelser også i lyset af resultatet om konstant arbejdsudbud må anses for at være for restriktive, idet der er klare empiriske tegn på fluktuationer i den anvendte approksimation til denne størrelse²⁷.

4.3 Procyklisk realløn

Vi vil nu se nærmere på sammenhængen mellem fluktuationer i produktion og fluktuationer i reallønnen. Vi benytter ligning (2.2), der beskriver reallønnen. Vi udregninger elasticiteten af reallønnen mht. produktionen:

$$El_{Y_t} w_t \equiv \frac{\partial w_t}{\partial Y_t} \cdot \frac{Y_t}{w_t} = (1 - \alpha) \frac{1}{L_t} \cdot \frac{Y_t}{w_t} = 1 \quad (4.2)$$

Altså er elasticiteten af reallønnen mht. produktionen lig med 1. Det vil sige, at en ændring i produktionen med 1% medfører en ændring i reallønnen på 1%. I figur 4.3 er afbildet kvartalsvise vækstrater i hhv. realløn og BNP pr. capita i Danmark i perioden 1988-2002.



I figur 4.3 ses, at den positive korrelation, der trods alt findes empirisk mellem de to vækstrater, ikke er nær så kraftig som modellen forudsiger. Modellen implicerer som nævnt en elasticitet på 1 i reallønnen mht. produktionen, mens denne elasticitet i figuren er beregnet til væsentlig mindre. Reallønnen synes således kun at være svagt procyklisk. Derfor er effekten på reallønnen af et stød, altså mindre end modellen forudsiger. Ved at betragte boks 3.1

²⁷ Idet vi igen husker at vi har måttet nøjedes med at betragte den i ligning (4.1) opstillede approksimation.

ses det, at dette alt andet lige vil medføre, at arbejdsudbudet ikke længere er ufølsomt overfor stød til A_t .

Altså er det igen tydeligt, at modellens antagelser er for restriktive til at kunne give en rimelig beskrivelse af virkeligheden. Det er problematisk, at modellen giver en så tæt sammenhæng mellem produktion og realløn, da denne altså ikke kan genfindes empirisk. Én måde at få elimineret den tætte teoretiske sammenhæng mellem produktion og beskæftigelse er, at indføre en offentlig sektor i økonomien. Dette diskuteres kort i afsnit 6.

5 Diskussion af modellen

I dette afsnit diskuteres modellens implikationer for udviklingen i output gap'et og sammenhængen mellem fluktuationer i teknologi og output gap. Endelig diskuteres modellens evne til at forklare længerevarende effekter.

5.1 Produktionsfluktuationer

Vi vender nu tilbage til at se på fluktuationer i output gap'et. Som tidligere nævnt er det interessant at undersøge fluktuationer i produktionen i modellen, især fordi det ofte er produktionsfluktuationer, der henvises til, når der refereres til konjunkturcykler i den offentlige debat. I ligning (3.14) fandt vi følgende bevægelsesligning for udviklingen i output gap'et:

$$\tilde{Y}_t = (\alpha + \rho_A)\tilde{Y}_{t-1} - \alpha\rho_A\tilde{Y}_{t-2} + (1-\alpha)\varepsilon_{A,t} \quad (5.1)$$

Som tidligere nævnt følger output gap'et en anden ordens autoregressiv proces. Det er en interessant egenskab, at effekten af første *lag* er positivt, mens effekten af andet *lag* er negativt. Det vil sige, at produktion over trendværdien i periode t alt andet lige vil betyde en højere produktion i periode $t+1$. I afsnit 5.2 vender vi tilbage til at diskutere output gap'ets reaktion på choks.

Det vil være interessant at undersøge hvorvidt resultatet om, at output gap'et følger en anden ordens autoregressiv proces er foreneligt med empiri. For at undersøge dette, er vi først nødt til at udskille output gap'et fra produktionstallene. Med andre ord skal vi have detrendet en BNP-tidsserie. Vi anvender sæsonkorrigerede kvartalsdata for Danmark i perioden 1988-2002²⁸. Til at detrende tidsserien anvender vi Hodrick-Prescott filteret (HP-filteret)²⁹. Vi husker, at output gap'et \tilde{Y}_t var defineret som afvigelsen mellem faktisk produktion og trend

²⁸ Data er målt i naturligvis målt i faste (1995-) priser.

²⁹ Bemærk at de empiriske resultater er ganske afhængige af valget af detrendingmetode, og at derfor kan være noget usikkerhed forbundet med udskilningen af den ikke-trendmæssige komponent.

produktion målt i logaritmer. HP-filteret ser ud som følger³⁰:

$$\min_{\{\tilde{Y}_t\}_{t=1}^T} \left[\sum_{t=1}^T (\tilde{Y}_t)^2 + \lambda \cdot \sum_{t=2}^T \left(\Delta(\ln Y_{t+1} - \tilde{Y}_{t+1}) - \Delta(\ln Y_t - \tilde{Y}_t) \right)^2 \right] \quad (5.2)$$

Inden der detrendes, skal der vælges en værdi for parameteren λ . Valget af λ afspejler en afvejning mellem de to led i HP-filteret. Hvis λ vælges forholdsvis lille, så vil vægten blive lagt på at minimere det første led i udtrykket, dvs. at man kan få output gap'et til at blive vilkårligt lille, hvis der blot vælges et λ tilstrækkeligt lille. Hvis man ekstremt valgte $\lambda = 0$, da ville HP-filteret diktere, at $\tilde{Y}_t = 0 \forall t \in \{1, \dots, T\}$, og således ville HP-filteret påpege, at alle svingninger i BNP blot var udslag i trendvæksten. Hvis λ derimod vælges som et stort tal, så vil vægten blive lagt på andet led i HP-filteret, og dermed vil HP-filteret i større omfang undgå at skabe ændringer i trendvæksten. Valget af λ bør derfor afspejle denne afvejning. For kvartalsdata sættes λ normalt til 1600³¹, og det vil vi også gøre her. Hermed ser vi et billede som vist i bilagsfigur 1, hvor både faktisk og trend-BNP er angivet i logaritmer.

I bilagsfigur 1 kan \tilde{Y}_t aflæses som den lodrette afstand mellem de to kurver, og denne er illustreret i bilagsfigur 2. Formålet med den nu fremkomne tidsserie er at teste om denne kan antages at være en anden ordens autoregressiv proces, som ligning (5.1) beskriver det. For at kontrollere dette, opstiller vi følgende regressionsligning:

$$\tilde{Y}_t = \beta_1 \cdot \tilde{Y}_{t-1} + \beta_2 \cdot \tilde{Y}_{t-2} + u_t \quad (5.3)$$

Vi estimerer denne på sædvanlig vis med *mindste kvadraters* metode. Bemærk, at der er nogle statistiske problemer med en sådan estimation³². Derfor bør parameterestimererne fortolkes med et gran salt. Estimationen giver følgende³³:

$$\tilde{Y}_t = 0,46 \underset{(0,13)}{\tilde{Y}_{t-1}} - 0,12 \underset{(0,13)}{\tilde{Y}_{t-2}} + u_t \quad (5.4)$$

Det ses, at resultaterne stemmer godt overens med det teoretisk udledte, nemlig at koefficienten til output gap'et i periode $t-1$ er positivt, mens koefficienten til output gap'et i periode $t-2$ er negativ. Også forholdet mellem størrelsesordenen af de to parameterestimerer stemmer overens med de teoretiske resultater, nemlig at koefficienten til output gap'et i periode $t-1$

³⁰ Jf. eksempelvis Arnold (2001) s. 6 el. Sørensen, kap. 15 s. 12

³¹ Kilde: Sørensen, kap. 15 s. 13.

³² Fordi der indgår laggede værdier af den afhængige variabel i ligningen er parameterestimererne skæve (biased), men tenderer mod at blive middelfrette, jo større sample der betragtes. Hvis de forklarende variable er korreleret med fejleddet u_t , så vil estimererne ikke blot være biased, men også inkonsistente. Det kan dog vises ikke at være noget problem i denne estimation, hvor der ikke er nogen væsentlig korrelation mellem de to forklarende variable og fejleddet (jf. i øvrigt Gujarati (1999) s. 442). Desuden er modellen estimeret uden konstantled, hvilket også er kilde til problemer i en sådan estimation.

³³ Tallene i parentes under parameterestimererne er standardafvigelsen på estimatet.

numerisk set er større end koefficienten til output gap'et i periode $t-2$. Dog er koefficienten til output gap'et i periode $t-2$ ikke signifikant forskellig fra nul. Mens det indbyrdes størrelsesforhold mellem de to koefficienter passer godt med empiri, så må vi sige at de absolutte størrelser af de to koefficienter er noget mindre end forventet teoretisk. Da koefficienten til \tilde{Y}_{t-1} i modellen er $\alpha + \rho_A$, så skulle den sum altså være 0,46 ifølge estimationen. Dette er lidet realistisk, da α normalt estimeres til værdier omkring $\frac{1}{3}$. Således skulle ρ_A være meget lille, hvilket vil sige en meget lille autoregressiv effekt på et teknologistød fra én periode til den næste, hvilket ikke virker plausibelt. Det vil være naturligt at forvente en høj grad af spill-over mellem perioderne i den teknologiske udvikling. Således at et positivt chok til teknologi (produktivitet) i én periode som udgangspunkt også gør det sandsynligt, at produktiviteten stadig er høj (over langsigts væksthiveauet) i den næste periode.

Altså må vi begrænse os til at slutte, at der er en kvalitativ forholdsvis god sammenhæng mellem modellens forudsigelse omkring bevægelsen i output gap'et og det faktuelle output gap, som estimeret ved HP-filteret. Man skal dog igen huske på, at der er nogle statistiske problemer forbundet med estimationen, og derfor *kan* resultaterne være fejlbehæftede. Vi kan derfor blot konkludere, at der tilsyneladende er en god kvalitativ sammenhæng mellem teori og empiri, når det drejer sig om bevægelser i output gap'et. Til gengæld er de kvantitative resultater som nævnt mere tvivlsomme.

5.2 Længerevarende effekter

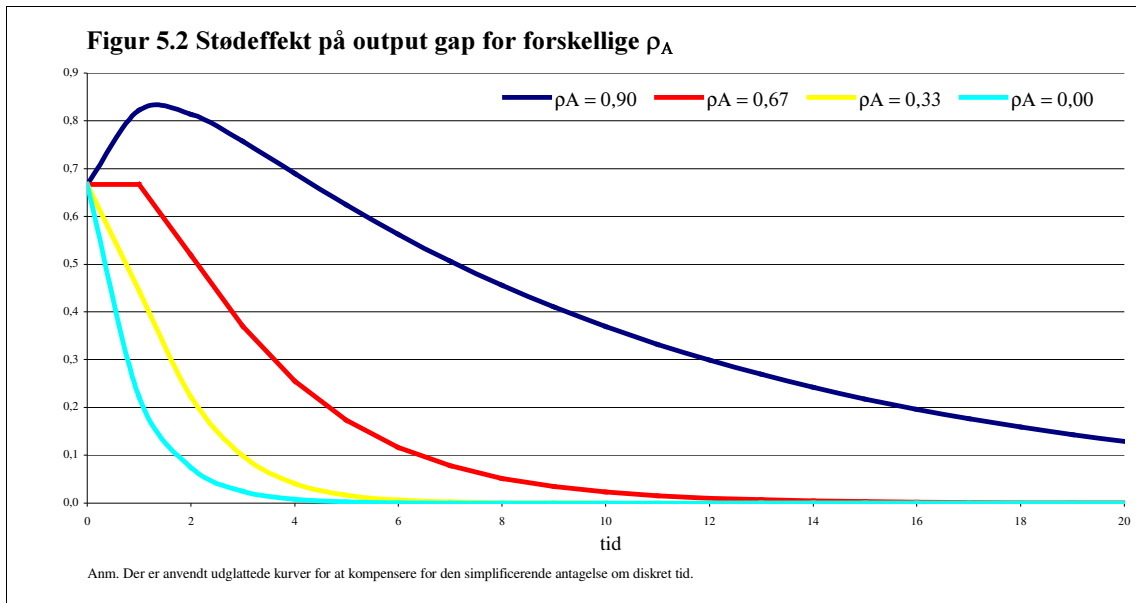
Vi så under modelløsningen, at modellens forklaringssevne i høj grad afhænger af de forsimplende antagelser, samt det faktum at teknologien beskrives ved en AR(1) proces. Vi ønsker derfor at undersøge, hvorvidt modellen kan beskrive længerevarende effekter som følge af modellens drivende stød, teknologichok.

Det vil være logisk i første omgang at stille sig selv spørgsmålet, hvorfor bevægelsesligningen for output gap'et lige præcis følger en autoregressiv proces af *anden* orden. At modellen implicerer at udsving i produktion fra trendniveauet lige præcis følger en autoregressiv proces af *anden* orden, hænger helt og holdent på den postulerede bevægelsesligning for teknologi, nemlig at \tilde{A}_t følger en autoregressiv proces af *første* orden. Det er vist i appendiks A, at hvis \tilde{A}_t antages at følge en autoregressiv proces af n 'te orden, så vil produktionen vise sig at følge en autoregressiv proces af $n+1$ 'te orden.

Hvorfor er bevægelsesligningen for \tilde{A}_t så lige netop valgt som en *første* ordens autoregressiv proces? Den første årsag er naturligvis, at det gør modellen forholdsvis simpel. Den

anden årsag er, at den måde teknologi er modelleret på rent faktisk passer godt med empiriske estimater af Solow-residualen³⁴.

For at danne os et indtryk af modellens evne til at forklare længerevarende effekter på output gap'et, vil vi betragte forskellige ρ_A -værdier. α estimeres normalt med stor sikkerhed til i omegnen af $\frac{1}{3}$, og vi vil derfor ikke lade den variere, men blot fastholde den på denne værdi³⁵.



I figur 5.2 er indtegnet effekten på output gap'et af et teknologistød på tidspunkt 0 på nominelt 1. Det er antaget, at output gap'et indtil tidspunkt 0 var nul og Y således fulgte sin trend. Effekten på output gap'et i samme periode er uafhængigt af ρ_A , og den bestemmes alene af produktionselasticiteten mht. arbejdskraft, idet TFP er labor-augmenting. Effektens størrelse i de efterfølgende perioder ses at være stærkt afhængig af ρ_A 's størrelse, således at et større ρ_A giver større effekt på output gap'et. Det ses, at selv ved et ρ_A på $\frac{2}{3}$ er stødets effekt på output gap'et mere end halveret efter blot 3 perioder. Den interessante egenskab for store værdier af ρ_A er, at output gap'et først når sit maksimum, som følge af et stød på tidspunkt t , *efter* at stødet er indtruffet. Derfor vil man for tilstrækkeligt store værdier af ρ_A få, at ved et positivt teknologistød, da vil output gap'et først stige for derefter at toppe nogle perioder efter at stødet er indtruffet. Herefter udfases effekten af stødet gradvist. En sådan form på output gap'et kaldes en "hump-shape", pga. den grafiske form et sådant forløb udviser. Af ligning

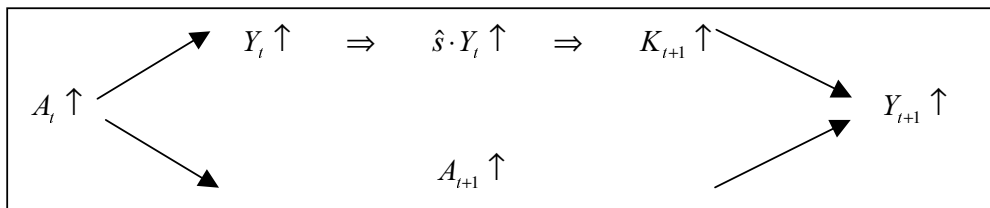
³⁴ Kilde: Arnold (2002), s. 85

³⁵ Det kan vises, at følgende analyse ikke er følsom overfor beskedne ændringer i α

(5.1) kan man se, at for at få output gap'et til at udvise en "hump-shape" kræves, at summen af α og ρ_A (koefficienten til \tilde{Y}_{t-1}) er større end 1.

Man kan altså konkludere, at modellens evne til at forklare længerevarende effekter er stærkt afhængig af en væsentlig grad af autokorrelation i TFP. Det må umiddelbart betragtes som en svaghed for modellen at tillægge ρ_A så stor en betydning for modellens forklaringssevne. Dette kan dog henføres alene til transitionsmekanismen, som er illustreret i boks 5.1. Et stød på tidspunkt t forplanter sig således til periode $t+1$ via højere indkomst og derved opsparring samt træghed i selve stødet.

Boks 5.1 – Effekt på produktion af et positivt teknologisk chok



Det vil være muligt at slække kravet om persistens i stødet, såfremt man tillader en nedslidningsrate δ mindre end 1. Som modellen er konstrueret udgøres periodens kapitalapparat af sidste periodes opsparring, hvilket medfører, at kapitalapparatet ikke har nogen "hukommelse". En nedslidningsrate på mindre end 1 vil altså betyde, at kapitalapparatet og output vil være højere i næste periode som følge af et positivt stød i sidste periode selv med konstant aggregeret opsparring og uden persistens i stødet. Der ville således være flere afledte effekter fra et stød til teknologien.

En nedslidningsrate mindre end 1 åbner altså mulighed for større persistens i modellen, idet en del af kapitalapparatet nu føres videre i hver periode. Den nemmeste måde at indse at en nedslidningsrate mindre end 1 giver mere plausible effekter, er ved at betragte den omvendte ekstreme situation, hvor $\delta = 0$, og hvor vi samtidig sætter $g = 0$ ³⁶. Dette betyder at der vil være nul investeringer i en stabil situation uden stød. Et positivt teknologistød betyder at marginalproduktet af kapital, dvs. realrenten, stiger. Derfor vil forbrugerne nu vælge at investere, altså at hæve deres opsparringskvote. At opsparringen midlertidigt er høj, har den effekt i forhold til den optimale forbrugsbane, at vækstraten i forbruget nu forventes højere end ellers med en konstant opsparringskvote. Hvis vi ser på Eulerligningen (2.20) for den optimale forbrugsbane, så ser vi at en sådan stigning i den forventede vækst i forbruget, må kræve at den forventede realrente netop stiger. Endvidere ved vi fra ligning (2.17), at en stigning i realren-

³⁶ Kilde: Romer (2001), s. 185

ten betyder at arbejdsudbuddet nu stiger relativt til arbejdsudbuddet senere. Ved en nedslidning mellem $\delta = 0$ og $\delta = 1$ vil effekterne være mindre, men ikke desto mindre vil de virke i retning af, at såvel investeringer og beskæftigelse påvirkes mere af teknologistød. Indførelse af ufuldkommen nedslidning vil således øge muligheden, for at modellen kan generere længelevende effekter i produktionen uden den samme krav til autokorrelation i TFP.

Det vil være nærliggende ved en generel modelløsning at tillade en lavere nedslidningsrate. For en konjunkturmodel hvor perioder opgøres i måneder eller kvartaler, er det selvfølgelig en urealistisk antagelse, at kapitalapparatet nedslides på én periode. Som vi bemærkede i afsnit 2.1, gøres antagelsen for at tillade at modellen løses analytisk. Data for Danmark i perioden 1964-1998 angiver da også, at den *årlige* nedslidningsrate i gennemsnit udgør blot 10,3%³⁷. Antagelsen er alene gjort med henblik på at forenkle modelløsningen, hvorfor den egentligt ikke ligger en begrænsning på RBC-teorien, men blot den betragtede model.

5.3 Totalfaktorproduktiviteten

Med de sidste afsnits fokus på totalfaktorproduktivitets rolle vil vi nu betragte antagelserne vedrørende netop denne. Under præsentationen forklarede vi, at det reelt var et mål for uvidenhed eller ufuldkommenhed i vækstregnskabsøjemed. Det skulle betragtes som teknologi, og hvilke faktorer der udgør teknologi er selvfølgelig et definitionsspørgsmål. Stød til A kan i modellen betragtes som ethvert stød, der skalerer produktionen op eller ned, dvs. ændrer den mulige produktion for givne inputfaktorer. Et eksempel på noget sådant er Generel Purpose Technology³⁸. Idet den nye teknologi bliver alment kendt, er den et perfekt offentligt gode, som enhver virksomhed kan indføre i sin produktionsproces og udnytte for givne inputs – altså svarende til et positivt teknologistød.

Imidlertid kan ikke alle elementer, der påvirker A , formodes at være af formen givet ved eksemplet ovenfor. Det er dog kun naturligt, at man ved valg af en produktionsfunktion foretager et trade-off mellem enkelthed og forklaringsgrad.

I produktionsfunktionen antages det, at produktionsfaktorerne er homogene. Der kan dog ikke herske tvivl om, at både kapital og arbejdskraft i virkeligheden er heterogene inputs³⁹. Eksempelvis må man forvente en værdimæssig forskel i arbejdsindsatsen af en højtuddannet arbejder mod en uudannet arbejder. Med kapital kan eksempelvis nævnes, at traktorer

³⁷ Kilde: Adalmir A. Marquetti: Extended Penn World Tables.

³⁸ Fx Isaac Newtons opfindelse af differentialregning eller opfindelsen af hjulet.

³⁹ Inspiration til modellering af heterogene faktor inputs kan findes i: Mogens Fosgerau, "Nogle facts om dansk produktivitet", Nationaløkonomisk Tidsskrift 139, p. 42-60

er mere effektive end hest og plov. Sådanne heterogeniteter vil indgå i TFP, idet der i modellen altså antages homogene faktorinputs.

TFP's altafgørende rolle er et centralt punkt for kritik af RBC-teorien. Fluktuationer i økonomiens reale variable generes af stød til residualelementet i den aggregerede produktionsfunktion. Men hvad repræsenterer dette element egentlig? Som argumenteret ovenfor kan residualelementet indeholde et utal af underliggende elementer, der ikke er modelleret eksplisit. Ideelt set bør selve stødgeneratoren modelleres detaljeret for at muliggøre en dybere fortolkning. Det er således ikke muligt fra periode til periode at betragte et støds *oprindelse*, idet et stød til TFP som beskrevet kan stamme fra et utal af faktorer.

6 Perspektivering

Vi har i de foregående afsnit set, at den opstillede model har problemer med at forklare resultater, der findes empirisk. Det er klart, at når der opstilles en model med en række så forsimplende antagelser, som det her er tilfældet, så må der næsten uundgåeligt være empirisk observerede effekter, der ikke kan forklares i modellen. Det har altså også vist sig at være tilfældet.

Et naturligt spørgsmål at stille på nuværende tidspunkt vil være, at hvis der nu er alle de problemer med simplificeringen af modellen, hvorfor så ikke betragte en mere generel model? Som nævnt er det ene og alene det forhold, at en generaliseret model ikke kan løses analytisk, der gør, at vi har valgt at fokusere på den simplificerede model.

Et oplagt sted at ændre på modellen ville være at tillade nedslidning mindre end 100% hver periode, som forklaret i afsnit 5.2. Problemet med at have nedslidning på 100% beror, som vi så, på to faktorer. Dels at det ikke er plausibelt rent empirisk med en så stor nedslidningsrate, og dels at kapitalapparatet ikke i sig selv, men kun via opsparingen, fører et stød videre end blot én periode. Effekten på kapitalapparatet i de efterfølgende perioder dikteres i meget høj grad af størrelsen af den autoregressive effekt i TFP. Dette har den betydning, at det er modelleringen af TFP, der i ekstrem høj grad afgør udviklingen i økonomien. Samtidig er TFP i virkeligheden en variabel, der må forventes at dække over en masse forskellige faktorer, og derfor er det problematisk at den har så stor betydning.

Et andet oplagt sted at ændre modellen er at indføre en offentlig sektor, hvis efterspørgsel udsættes for stokastiske stød modelleret som TFP er modelleret i modellen, og hvis omkostninger er finansieret via lump-sum skatter.

Tilføjelsen af en offentlig sektor betyder, at al fluktuation i økonomien ikke længere behøver at stamme fra det brede teknologibegreb, men også kan forklares ud fra stød til offentlig

efterspørgsel. Desuden vil der ikke længere være den tætte sammenhæng mellem output og realløn. Et positivt stød til den offentlige efterspørgsel betyder, at forbrugerne indser, at deres livstidsskattebetalinger bliver større og reagerer ved at arbejde mere. Denne stigning i arbejdsudbuddet uden ændring i TFP og kapitalapparatet medfører et fald i reallønnen sideløbende med en stigning i output. Ergo kan vi nu godt have, at output og realløn kan bevæge sig modsat af hinanden, og således behøver reallønnen nu ikke længere af være stærkt procyklisk som i den simplificerede model.

Således vil blot disse to ændringer i modellen medføre, at vi får effekter i modellen, der umiddelbart må anses for at være mere rimelige, end dem vi opnåede i den simple model.

En løsning af en mere generel model kræver brug af numeriske metoder, typisk vha. EDB. Metoden der benyttes er at plausible parameterverdier baseret på mikro- eller makrodata vælges, og derefter kalibreres hele modellen simultant vha. EDB. Om modellens resultater er realistiske eller ej, bedømmes da ud fra en sammenligning af modellens variables varianser og kovarianser med empirisk estimerede.

Mange sådanne kalibreringer af hele den generelle model giver gode overensstemmelser mellem teori og empiri. Eksempelvis skriver Prescott i en artikel, at "*The match between theory and observation is excellent, but far from perfect.*"⁴⁰. I en anden artikel finder King m.fl. også, at en kalibreret RBC-model i hvert fald er i stand til at forklare en række karakteristika ved konjunkturcykler: "*...the basic neoclassical model is capable of replicating some stylized facts of economic fluctuations...But along other dimensions, the basic model seems less satisfactory.*"⁴¹. Altså finder en generaliseret RBC model nøjagtigt som den simplificerede model ej heller de vises sten. En del karakteristika vedrørende konjunkturcykler kan forklares i RBC-modellerne, men ligeledes er der en del karakteristika, som ikke kan forklares tilfredsstillende inden for rammerne af såvel den betragtede RBC-model, som andre mere generelle RBC-modeller.

⁴⁰ Kilde: Prescott (1986), "Summary and policy implications".

⁴¹ Kilde: King m.fl. (1988), s. 231.

7 Konklusion

Cykliske fluktuationer i økonomiens reale variable kan medføre u hensigtsmæssige fordelinger af økonomiens ressourcer blandt dens agenter. Denne uønskelige egenskab ved konjunkturcykler synes at have rimeliggjort ideen om at konjunkturcykler bunder i markedesfejl eller irrationalitet hos agenter. Det har imidlertid vist sig, at den betragtede model er i stand til at skabe konjunkturcykler i en walrasiansk økonomi uden nogen form for afvigelse fra de traditionelle antagelser fra mikroteorien om fuldkommen konkurrence, rationelle agenter, ingen markedesfejl etc. Derfor er de udsving modellen genererer de Pareto optimale reaktioner til de stokastiske udsving i TFP, der er den faktor som driver modellens fluktuationer.

Efter at have opstillet og løst modellen falder fokus naturligt på, hvorvidt modellen så også er i stand til at forklare konjunkturcykler på rimelig vis. Ikke overraskende viser det sig, at der er nogle problemer i forhold til empiri. Modellens forudsigelser vedrørende konstant opsparingskvote og konstant arbejdsudbud synes dårligt i overensstemmelse med empiri. Ligeledes forudsiger modellen, at reallønnen er perfekt positivt korreleret med produktionen, men empirisk synes reallønnen kun at være svagt procyklisk. Årsagen til disse afvigelser mellem modellen og empiri er en naturlig følge af de forsimplede antagelser vedrørende nedslidningsraten samt nytte- og produktionsfunktion.

I denne tekst er en simplificeret version af en RBC-model betragtet. På trods af modellens simplicitet giver den alligevel en række interessante indsigter. Det vises, at modellen i nogen grad er i stand til at forklare udsving i output. Til gengæld kræver modellen en betydelig grad af autokorrelation i TFP for at kunne forklare længerevarende effekter. To steder hvor modellens plausibilitet oplagt kan forbedres, er at indføre ufuldstændig nedslidning i hver periode, samt at indføre en offentlig sektor i økonomien.

Da TFP er det eneste stokastiske element i modellen, skaber det nogle problemer med hensyn til fortolkningen af udsvingene i eksempelvis BNP. Et udsving i BNP er produktet af et stød til TFP, altså et stød der skalerer produktionen enten op eller ned for givne inputfaktorer. Der må forventes at være mange andre faktorer end teknologi, der har evne til at skalere produktionen op eller ned for given arbejdskraft og kapitalapparat. Derfor kan TFP kun i meget ringe grad direkte ses som et udtryk for *teknologi*.

Vi har her gennemgået en anden type konjunkturmodel end de traditionelle; en konjunkturmodel der alene fokuserer på udbudssiden af økonomien. Man bør bemærke, at den betragtede model, trods sine stærkt forsimplede antagelser, giver en indsigt i konjunkturcykler ud fra et utraditionelt perspektiv; nemlig at eksistensen af konjunkturcykler ikke behøver at bunde i markedesfejl, men blot er økonomiens Pareto optimale reaktion til eksogene stød.

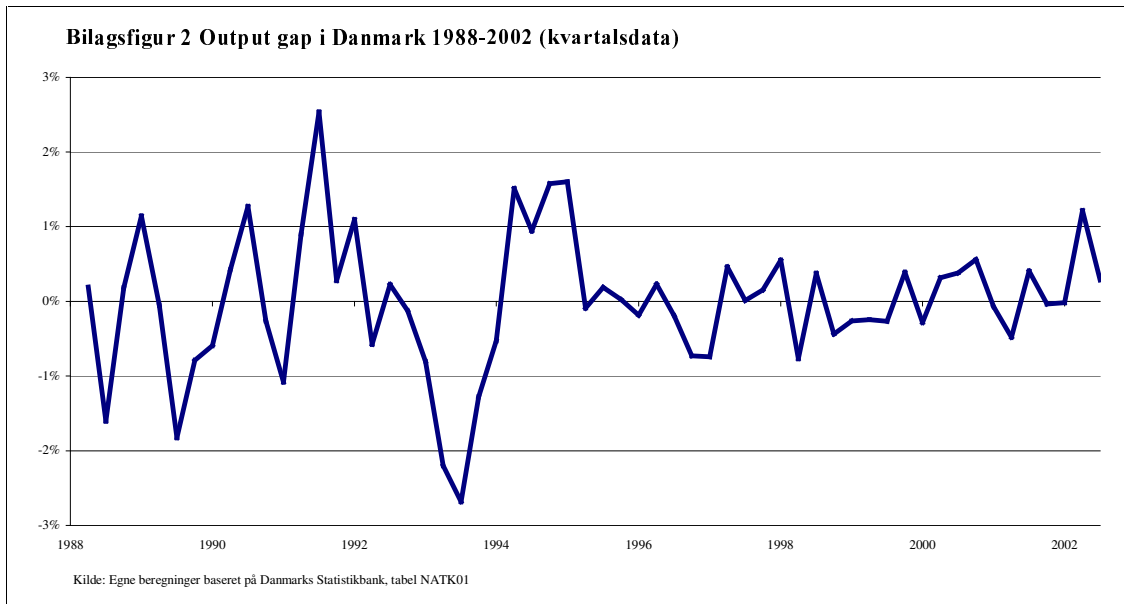
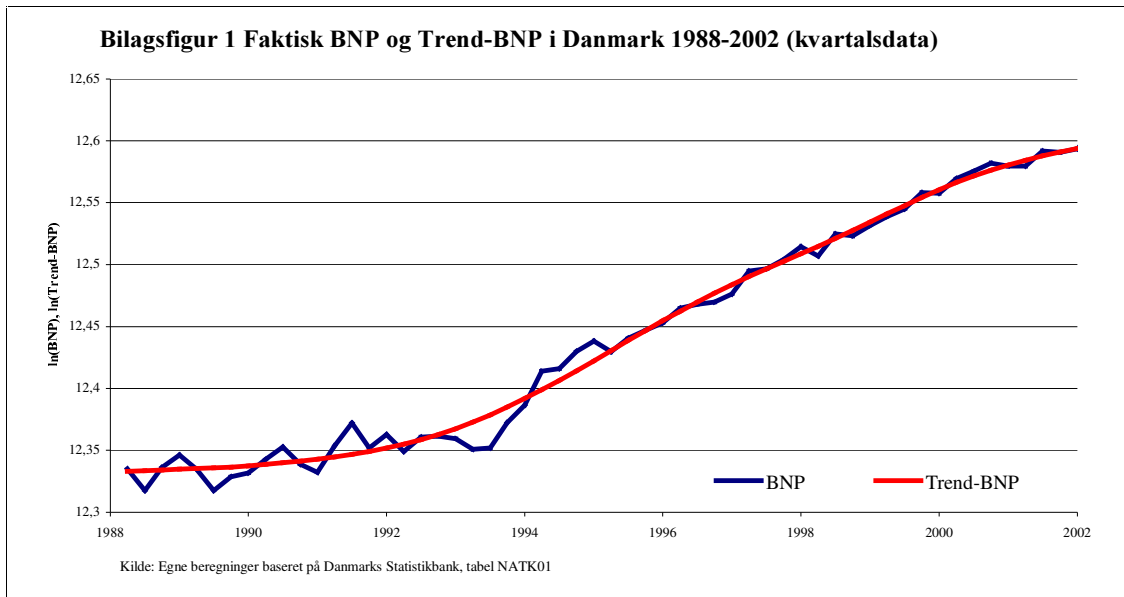
Litteraturliste:

- Arnold, Lutz G.: "Business Cycle Theory", Oxford University Press (2002).
- Groth, C.: "Note om Ramseymodellen og Pontryagins maksimumsprincip" (<http://www.econ.ku.dk/okocg>).
- Jones, Charles I.: "Introduction to Economic Growth", W.W. Norton (1998).
- King, Robert G., Charles I. Plosser & Sergio T. Rebelo: "Production, growth and business cycles – I. The Basic Neoclassical Model", Journal of Monetary Economics 21: 195-232, (1988)
- Kydland, F.E.: "Business Cycles and Aggregate Labor Market Fluctuations" i "Frontiers of Business Cycle Research", Princeton University Press (1995)
- Mas-Colell, Whinston & Green: "Microeconomic Theory", Oxford University Press, (1995).
- Prescott, E. S.: "Theory Ahead of Business Cycle Measurement", Federal Reserve Bank of Minneapolis Quarterly Review 9-22, (1986).
- Romer, David: "Advanced Macroeconomics", 2nd ed., McGraw-Hill Higher Education (2001).
- Sundaram, Rangarajan K.: "A First Course in Optimization Theory", Cambridge University Press (1996).
- Sørensen, P. B.: "A course in Macro", endnu ej udgivet. (<http://www.econ.ku.dk/pbs/>)
- Varian, Hal R.: "Intermediate Microeconomics", 5th ed., W.W. Norton (1999).

Datakilder:

- Danmarks Statistikbank, Tabellerne ILON6, NATK01, RAS33 (<http://www.statistikbanken.dk>)
- Penn World Table Version 6.1, Center for International Comparisons at the University of Pennsylvania (CICUP), Alan Heston, Robert Summers and Bettina Aten, (2002) (<http://pwt.econ.upenn.edu/>)
- Extended World Penn Tables, Adalmer Marquetti (<http://homepage.newschool.edu/~foleyd/epwt/>)
- The GGDC Total Economy Database, University of Groningen, Faculty of Economics. (<http://www.eco.rug.nl/ggdc/index-dseries.html>).
- Global Development Network Growth Database, William Easterly and Mirvat Sewadeh, World Bank (<http://www.worldbank.org/research/growth/GDNdata.htm>).

Bilag 1 Figurer til afsnit 5.1



Appendiks A

I dette appendiks vises sammenhængen mellem den autoregressive formulering af teknologien og bevægelsesligningen for output gap'et. A_t følger, som før, en proces givet ved:

$$\ln A_t = \bar{A} + g \cdot t + \tilde{A}_t \quad (\text{AA.1})$$

Forskellen er blot, at den irregulære komponent \tilde{A}_t ikke længere følger en første ordens autoregressiv proces, men en n 'te ordens autoregressiv proces, som beskrevet i ligning (AA.2):

$$\tilde{A}_t = \rho_{A1} \cdot \tilde{A}_{t-1} + \rho_{A2} \cdot \tilde{A}_{t-2} + \dots + \rho_{An} \cdot \tilde{A}_{t-n} + \varepsilon_{A,t}, \quad \rho_{Ai} \in]1;1[\quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (\text{AA.2})$$

Vi benytter ligning (3.13):

$$\tilde{Y}_t = \alpha \tilde{Y}_{t-1} + (1-\alpha) \tilde{A}_t \quad (\text{AA.3})$$

Ved at lagge denne ligning med $\{1, \dots, n\}$ perioder opnås relationer for $\tilde{A}_{t-1}, \tilde{A}_{t-2}, \dots, \tilde{A}_{t-n}$ svarende til:

$$\tilde{A}_{t-i} = \frac{1}{1-\alpha} (\tilde{Y}_{t-i} - \alpha \tilde{Y}_{t-i-1}) \quad (\text{AA.4})$$

Ved at indsætte (AA.2) og (AA.4) i ligning (AA.3) fås:

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_t &= \alpha \tilde{Y}_{t-1} + (1-\alpha) \cdot (\rho_{A1} \cdot \tilde{A}_{t-1} + \rho_{A2} \cdot \tilde{A}_{t-2} + \dots + \rho_{An} \cdot \tilde{A}_{t-n} + \varepsilon_{A,t}) \Rightarrow \\ \tilde{Y}_t &= \alpha \tilde{Y}_{t-1} + \rho_{A1} (\tilde{Y}_{t-1} - \alpha \tilde{Y}_{t-2}) + \rho_{A2} (\tilde{Y}_{t-2} - \alpha \tilde{Y}_{t-3}) + \dots + \rho_{An} (\tilde{Y}_{t-n} - \alpha \tilde{Y}_{t-n-1}) + (1-\alpha) \varepsilon_{A,t} \Rightarrow \\ \tilde{Y}_t &= (\alpha + \rho_{A1}) \tilde{Y}_{t-1} + (\rho_{A2} - \alpha \rho_{A1}) \tilde{Y}_{t-2} + (\rho_{A3} - \alpha \rho_{A2}) \tilde{Y}_{t-3} + \dots + (\rho_{An} - \alpha \rho_{A(n-1)}) \tilde{Y}_{t-n} \\ &\quad - \alpha \rho_{A(n-1)} \tilde{Y}_{t-(n+1)} + (1-\alpha) \varepsilon_{A,t} \end{aligned} \quad (\text{AA.5})$$

Det ses altså, at hvis \tilde{A}_t følger en autoregressiv proces af n 'te orden, så følger \tilde{Y}_t en autoregressiv proces af $n+1$ 'te orden. På den måde hænger graden af autoregressivitet alene på den postulerede proces for teknologiske stød. Derfor kan man modellere output gap'et i modellen præcis som man foretrækker det, ved blot at modellere stødene til teknologi på passende vis. Hvis man derfor har empiriske tegn på, at output gap'et følger en n 'te ordens autoregressiv proces, så skal man blot modellere stød til teknologi som en $n+1$ 'te ordens autoregressiv proces. Som nævnt i teksten, så er grunden til at vi har valgt at modellere stød til teknologi som en første ordens autoregressiv proces, at det passer godt med empiriske estimater af Solow-residualen, samt at det naturligvis gør modellen relativt simpel.

Appendiks B

Vi vil i dette appendiks vise, at den log-lineære nyttefunktion er et specialtilfælde af CES-typen, og valg af den log-lineære funktion medfører et implicit valg af substitutionselasticitet mellem argumenterne i funktionen. Hertil er anvendt Knut Sydsæters "Matematisk Analyse Bind I" afsnit 6.5 og 12.7 samt "Nødvendig matematik til Makro 3" af Michael Andersen & Carl Johan Dalgaard.

Vi har givet en CES-funktion og vil anvende L'Hôpitals regel, begge opskrevet herunder.

$$F(c, 1-l) = (a \cdot c^{-\rho} + b \cdot (1-l)^{-\rho})^{-\frac{1}{\rho}}, \quad a+b=1 \quad (\text{AB.1})$$

At summen af koefficienterne er lig 1 er alene et skalaspørgsmål og på ingen måde en restriktiv antagelse.

L'Hôpitals regel:

Antag at f og g er differentiable i intervallet $[\alpha, \beta]$ omkring a og at begge går mod 0 når x går mod a . Da vil følgende gælde:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

Vi definerer nu funktionen z som

$$z \equiv \ln(F(c, 1-l)) = -\frac{\ln(a \cdot c^{-\rho} + b \cdot (1-l)^{-\rho})}{\rho} \quad (\text{AB.2})$$

Vi ser at $z \rightarrow \frac{0}{0}$ når $\rho \rightarrow 0$. Altså er z ubestemt for $\rho \rightarrow 0$, når den beskrives ved formen i

(AB.2). Vi undersøger derfor z 's form i grænsen ved brug af L'Hôpitals regel

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} z = -\frac{\frac{\partial(\ln(a \cdot c^{-\rho} + b \cdot (1-l)^{-\rho}))}{\partial \rho}}{\frac{\partial \rho}{\partial \rho}} \Bigg|_{\rho=0} = \frac{a \cdot c^0 \cdot \ln c + b \cdot (1-l)^0 \cdot \ln(1-l)}{a \cdot c^0 + b \cdot (1-l)^0} \Rightarrow$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} z = \frac{a}{a+b} \ln c + \frac{b}{a+b} \ln(1-l) \quad (\text{AB.3})$$

Det ses, at i grænsen hvor $\rho \rightarrow 0$, tager CES-funktionen præcis den log-lineære form, der anvendes i modellen. Vi husker, at en positiv monoton transformation repræsenterer de samme underliggende præferencer;

$$\ln c + \frac{b}{a} \ln(1-l) = \ln c + \phi \cdot \ln(1-l), \phi \equiv \frac{b}{a} \quad (\text{AB.4})$$

Beregn substitutionselasticiteten fås

For log-lineær funktion: $\sigma_{c,(1-l)} = 1$

For CES-funktion: $\sigma_{c,(1-l)} = \frac{1}{1+\rho}$

Ved en generel CES-funktion vil substitutionselasticiteten altså være parameteriseret. Altså er den log-lineære nyttefunktion et specielt tilfælde af nyttefunktioner af CES-typen.