

## Algebraisk udledning af IS- og LM-kurve samt $Y$ og $r$

Denne lille note viser hvordan man matematisk i en IS-LM-model for en lukket økonomi udleder IS-kurven og LM-kurven samt udregner ligevægtsindkomsten og ligevægtsrenten. Udregningerne gøres for en model med lineære funktioner<sup>1</sup>:

$$(1) \quad Y = C + I + \bar{G}$$

$$(2) \quad C = \alpha + \beta \cdot (Y - \bar{T})$$

$$(3) \quad I = \gamma - \delta \cdot r$$

$$(4) \quad \frac{\bar{M}}{\bar{P}} = L$$

$$(5) \quad L = \eta \cdot Y - \theta \cdot r$$

Endogene:  $Y, C, I, r, L$

Eksogene:  $\bar{G}, \bar{T}, \bar{M}, \bar{P}$

Parametre:  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta, \theta$

IS-kurven består af ligningerne (1) til (3). Ved at indsætte adfærdsrelationerne for privat konsum og investeringsefterspørgsel, dvs. ligning (2) og (3), i forsyningsbalancen, dvs. ligning (1), fås et udtryk for IS-kurven, hvor vi kan isolere realrenten:

$$\begin{aligned} Y = C + I + \bar{G} &\Rightarrow Y = \alpha + \beta(Y - \bar{T}) + \gamma - \delta r + \bar{G} \Rightarrow \\ \delta r &= \alpha + \beta Y - \beta \bar{T} + \gamma + \bar{G} - Y = (\beta - 1)Y + \alpha + \gamma + \bar{G} - \beta \bar{T} \Rightarrow \\ r &= \frac{1}{\delta} \cdot ((\beta - 1)Y + \alpha + \gamma + \bar{G} - \beta \bar{T}) \end{aligned}$$

LM-kurven består af ligningerne (4) og (5). Ved at sætte disse to ind i hinanden fås LM-kurven, hvor vi isolerer renten:

$$\frac{\bar{M}}{\bar{P}} = L = \eta Y - \theta r \Rightarrow \theta r = \eta Y - \frac{\bar{M}}{\bar{P}} \Rightarrow r = \frac{1}{\theta} \left( \eta Y - \frac{\bar{M}}{\bar{P}} \right)$$

For at finde ligevægtsindkomsten sættes IS- og LM-kurven ind i hinanden, og da vi har isoleret realrenten i begge ligninger, da skal vi bare sætte de to højresider lig med hinanden og isolere  $Y$ :

<sup>1</sup> I virkeligheden er lineære funktioner ifølge matematikere kun de *affine funktioner uden konstantled*. En affin funktion har formen  $f(x) = ax + b$ . Lineære funktioner har formen  $f(x) = ax$ . I denne note misbruges terminologien ikke desto mindre således, at når der refereres til lineære funktioner menes en *affin funktion*, altså en funktion, der kan skrives på formen  $f(x) = ax + b$ .

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta} \cdot ((\beta - 1)Y + \alpha + \gamma + \bar{G} - \beta\bar{T}) &= \frac{1}{\theta} \left( \eta Y - \frac{\bar{M}}{P} \right) \Leftrightarrow \frac{\beta - 1}{\delta} Y - \frac{\eta}{\theta} Y = -\frac{1}{\delta} [\alpha + \gamma + \bar{G} - \beta\bar{T}] - \frac{1}{\theta} \frac{\bar{M}}{P} \Leftrightarrow \\ -\left[ \frac{1 - \beta}{\delta} + \frac{\eta}{\theta} \right] Y &= -\frac{1}{\delta} [\alpha + \gamma + \bar{G} - \beta\bar{T}] - \frac{1}{\theta} \frac{\bar{M}}{P} \Leftrightarrow \left[ \frac{1 - \beta}{\delta} + \frac{\eta}{\theta} \right] Y = \frac{1}{\delta} [\alpha + \gamma + \bar{G} - \beta\bar{T}] + \frac{1}{\theta} \frac{\bar{M}}{P} \Leftrightarrow \\ [\theta(1 - \beta) + \delta\eta] Y &= \theta \cdot [\alpha + \gamma + \bar{G} - \beta\bar{T}] + \delta \frac{\bar{M}}{P} \Leftrightarrow Y = \frac{\theta \cdot [\alpha + \gamma + \bar{G} - \beta\bar{T}]}{\theta(1 - \beta) + \delta\eta} + \frac{\delta}{\theta(1 - \beta) + \delta\eta} \frac{\bar{M}}{P} \Leftrightarrow \\ Y &= \frac{\alpha + \gamma + \bar{G} - \beta\bar{T}}{(1 - \beta) + \frac{\delta\eta}{\theta}} + \frac{1}{\frac{\theta}{\delta}(1 - \beta) + \eta} \frac{\bar{M}}{P} \end{aligned}$$

Hermed har vi fundet et udtryk for ligevægtsindkomsten. Bemærk, at hvis vi nu ophæver antagelsen om at prisniveauet er eksogent, da fås et udtryk for en AD-kurve der giver aggregeret efterspørgsel som funktion af prisniveauet:

$$\text{(AD-kurven): } Y = \frac{\alpha + \gamma + \bar{G} - \beta\bar{T}}{(1 - \beta) + \frac{\delta\eta}{\theta}} + \frac{\bar{M}}{\frac{\theta}{\delta}(1 - \beta) + \eta} \cdot \frac{1}{P}$$

Blot mangler vi at finde ligevægtsrealrenten, dette gøres ved at indsætte den fundne ligevægtsindkomst i enten IS- eller LM-kurven. Vi indsætter i LM-kurven:

$$r = \frac{1}{\theta} \left( \eta Y - \frac{\bar{M}}{P} \right) = \frac{1}{\theta} \left( \eta \cdot \left[ \frac{\alpha + \gamma + \bar{G} - \beta\bar{T}}{(1 - \beta) + \frac{\delta\eta}{\theta}} + \frac{1}{\frac{\theta}{\delta}(1 - \beta) + \eta} \cdot \frac{\bar{M}}{P} \right] - \frac{\bar{M}}{P} \right)$$

Som de amerikanske lærebøger ville skrive, ”*the algebraic reduction of the latter statement is left as an exercise for the courageous reader*”... ☺