Algebraisk udledning af IS- og LM-kurve samt Y og r

Denne lille note viser hvordan man matematisk i en IS-LM-model for en lukket økonomi udleder IS-kurven og LM-kurven samt udregner ligevægtsindkomsten og ligevægtsrenten. Udregningerne gøres for en model med lineære funktioner[1]:

(1) $$Y = C + I + \overline{G}$$

(2) $$C = \alpha + \beta \cdot \left(Y - \overline{T}\right)$$

(3) $$I = \gamma - \delta \cdot r$$

(4) $$\frac{\overline{M}}{\overline{P}} = L$$

(5) $$L = \eta \cdot Y - \theta \cdot r$$

Endogene: Y, C, I, r, L Eksogene: $\overline{G}, \overline{T}, \overline{M}, \overline{P}$ Parametre: $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta, \theta$

IS-kurven består af ligningerne (1) til (3). Ved at indsætte adfærdsrelationerne for privat konsum og investeringsefterspørgsel, dvs. ligning (2) og (3), i forsyningsbalancen, dvs. ligning (1), fås et udtryk for IS-kurven, hvor vi kan isolere realrenten:

$$Y = C + I + \overline{G} \quad \Rightarrow \quad Y = \alpha + \beta\left(Y - \overline{T}\right) + \gamma - \delta r + \overline{G} \quad \Rightarrow$$
$$\delta r = \alpha + \beta Y - \beta\overline{T} + \gamma + \overline{G} - Y = (\beta - 1)Y + \alpha + \gamma + \overline{G} - \beta\overline{T} \quad \Rightarrow$$
$$\underline{\underline{r = \frac{1}{\delta} \cdot \left((\beta - 1)Y + \alpha + \gamma + \overline{G} - \beta\overline{T}\right)}}$$

LM-kurven består af ligningerne (4) og (5). Ved at sætte disse to ind i hinanden fås LM-kurven, hvor vi isolerer renten:

$$\frac{\overline{M}}{\overline{P}} = L = \eta Y - \theta r \quad \Rightarrow \quad \theta r = \eta Y - \frac{\overline{M}}{\overline{P}} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{r = \frac{1}{\theta}\left(\eta Y - \frac{\overline{M}}{\overline{P}}\right)}}$$

For at finde ligevægtsindkomsten sættes IS- og LM-kurven ind i hinanden, og da vi har isoleret realrenten i begge ligninger, da skal vi bare sætte de to højresider lig med hinanden og isolere *Y*:

[1] I virkeligheden er lineære funktioner ifølge matematikere kun de *affine funktioner uden konstantled*. En affin funktion har formen *f(x)=ax+b*. Lineære funktioner har formen *f(x)=ax*. I denne note misbruges terminologien ikke desto mindre således, at når der refereres til lineære funktioner menes en *affin funktion*, altså en funktion, der kan skrives på formen *f(x)=ax+b*.

$$\frac{1}{\delta}\cdot\left((\beta-1)Y+\alpha+\gamma+\overline{G}-\beta\overline{T}\right)=\frac{1}{\theta}\left(\eta Y-\frac{\overline{M}}{\overline{P}}\right)\quad\Leftrightarrow\quad\frac{\beta-1}{\delta}Y-\frac{\eta}{\theta}Y=-\frac{1}{\delta}\left[\alpha+\gamma+\overline{G}-\beta\overline{T}\right]-\frac{1}{\theta}\frac{\overline{M}}{\overline{P}}\quad\Leftrightarrow$$

$$-\left[\frac{1-\beta}{\delta}+\frac{\eta}{\theta}\right]Y=-\frac{1}{\delta}\left[\alpha+\gamma+\overline{G}-\beta\overline{T}\right]-\frac{1}{\theta}\frac{\overline{M}}{\overline{P}}\quad\Leftrightarrow\quad\left[\frac{1-\beta}{\delta}+\frac{\eta}{\theta}\right]Y=\frac{1}{\delta}\left[\alpha+\gamma+\overline{G}-\beta\overline{T}\right]+\frac{1}{\theta}\frac{\overline{M}}{\overline{P}}\quad\Leftrightarrow$$

$$\left[\theta(1-\beta)+\delta\eta\right]Y=\theta\cdot\left[\alpha+\gamma+\overline{G}-\beta\overline{T}\right]+\delta\frac{\overline{M}}{\overline{P}}\quad\Leftrightarrow\quad Y=\frac{\theta\cdot\left[\alpha+\gamma+\overline{G}-\beta\overline{T}\right]}{\theta(1-\beta)+\delta\eta}+\frac{\delta}{\theta(1-\beta)+\delta\eta}\frac{\overline{M}}{\overline{P}}\quad\Leftrightarrow$$

$$\underline{\underline{Y=\frac{\alpha+\gamma+\overline{G}-\beta\overline{T}}{(1-\beta)+\frac{\delta\eta}{\theta}}+\frac{1}{\frac{\theta}{\delta}(1-\beta)+\eta}\frac{\overline{M}}{\overline{P}}}}$$

Hermed har vi fundet et udtryk for ligevægtsindkomsten. Bemærk, at hvis vi nu ophæver antagelsen om at prisniveauet er eksogent, da fås et udtryk for en AD-kurve der giver aggregeret efterspørgsel som funktion af prisniveauet:

(AD-kurven): $$\underline{\underline{Y=\frac{\alpha+\gamma+\overline{G}-\beta\overline{T}}{(1-\beta)+\frac{\delta\eta}{\theta}}+\frac{\overline{M}}{\frac{\theta}{\delta}(1-\beta)+\eta}\cdot\frac{1}{P}}}$$

Blot mangler vi at finde ligevægtsrealrenten, dette gøres ved at indsætte den fundne ligevægtsindkomst i enten IS- eller LM-kurven. Vi indsætter i LM-kurven:

$$r=\frac{1}{\theta}\left(\eta Y-\frac{\overline{M}}{\overline{P}}\right)=\frac{1}{\theta}\left(\eta\cdot\left[\frac{\alpha+\gamma+\overline{G}-\beta\overline{T}}{(1-\beta)+\frac{\delta\eta}{\theta}}+\frac{1}{\frac{\theta}{\delta}(1-\beta)+\eta}\cdot\frac{\overline{M}}{\overline{P}}\right]-\frac{\overline{M}}{\overline{P}}\right)$$

Som de amerikanske lærebøger ville skrive, "*the algebraic reduction of the latter statement is left as an exercise for the courageous reader*"… ☺