Note til differentialligninger:

Først skal man naturligvis gøre sig klart hvilken orden differentialligningen er af.

Indgår $\dot{x}, \frac{dx}{dt}, x'(t)$ kun, eller er der også $\ddot{x}, \frac{d^2x}{dt^2}, x''(t)$?

Differentialligninger af første orden:

Vi opererer med flere typer af første ordens differentialligninger:

- Den simpleste type den type, hvor $\boxed{\dot{x} = f(t)}$. Her gælder naturligvis blot, at:

$$\dot{x} = \tfrac{dx}{dt} = x'(t) = f(t) \quad \Leftrightarrow \quad x(t) = \int f(t)dt = F(t) \tag{1}$$

- Den næste type 1. ordens differentialligninger er separable differentialligninger. Disse kan opskrives på formen $\boxed{\dot{x} = f(t) \cdot g(x)}$. Her separerer man de variable:

$$\dot{x} = x'(t) = \frac{dx}{dt} = f(t) \cdot g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \int \frac{1}{g(x)} dx = \int f(t)dt \tag{2}$$

  Når integralet er udregnet har du løsning, der dog kan tænkes at være på implicit form. **OBS!** Her skal du også være opmærksom på de såkaldte *konstante løsninger*, der er de tilfælde, hvor $g(x) = 0$, dvs. de tal: $\{ a \in \mathbf{R} \mid g(a) = 0 \}$, disse giver de konstante løsninger: $x(t) \equiv a$

- Vi ser nu på lineære differentialligninger af første orden. Vi starter med det lette tilfælde. Her kan ligningen skrives:

  $\boxed{\dot{x} + ax = b \text{ , } a,b \in \mathbf{R}}$.

  Løsningen kan skrives:

$$\dot{x} + ax = b \quad \Leftrightarrow \quad x(t) = C \cdot e^{-at} + \tfrac{b}{a} \qquad , b, a, C \in \mathbf{R}. \tag{3}$$

- Denne gang ses på lidt sværere lineære differentialligninger af første orden, der kan løses vha. den såkaldte Panserformel.

Ligningen er magen til den ovenfor, blot er a og b ikke længere skalarer, men funktioner af t:

$$\boxed{\dot{x}+a(t)x=b(t)}$$

Her bliver løsningen (Panserformlen):

$$\begin{aligned}&\dot{x}+a(t)x=b(t) \iff x(t)=e^{-\int a(t)dt}\cdot\left(C+\int e^{\int a(t)dt}\cdot b(t)dt\right) \iff \\ &x(t)=C\cdot e^{-A(t)}+e^{-A(t)}\cdot\int b(t)\cdot e^{A(t)}dt \quad , \quad hvor \;\; A(t)=\int a(t)dt\end{aligned} \tag{4}$$

- Så mangler vi Bernoullis differentialligning. Den kan skrives på formen:

$$\boxed{\dot{x}=Q(t)x+R(t)x^n}$$

Ligningen løses ved at man indfører en substitution: $z = x^{1-n}$. Herefter fås ligningen:

$$\frac{1}{1-n}\dot{z}+(-Q(t))=R(t) \tag{5}$$

Denne skal først normeres, og derefter kan den løses vha. Panserformlen (4).
Til sidst skal der substitueres tilbage, idet:

$$x(t)=z(t)^{\frac{1}{1-n}} \tag{6}$$

Således er løsningen fundet.

- Til sidst skal nævnes en speciel type af de separable differentialligninger, dem der kan skrives på formen $\boxed{\frac{dx}{dt}=B(x-a)(x-b)}$. Bemærk, at $a \neq b$. Udtrykket på højre side af lighedstegnet svarer til en omskrivning af et andengradspolynomiet. Dvs. at vi vil løse de differentialligninger, hvor den første afledede er lig med et andengradspolynomium. (i x!) Bemærk i øvrigt, at metoden ikke kan bruges, hvis polynomiet har en dobbeltrod.

$$\begin{aligned}&\tfrac{dx}{dt}=B(x-a)(x-b) \iff \\ &x(t)=\frac{b-a\cdot C\cdot e^{B(b-a)t}}{1-C\cdot e^{B(b-a)t}}=a+\frac{b-a}{1-C\cdot e^{B(b-a)t}}\end{aligned} \tag{7}$$

Når man løser denne type 1. ordens differentialligninger, så er det vigtigt, at der henvises til Sydsæter bind II s. 10-11, hvor udregningerne står.

<u>Differentialligninger af anden orden:</u>

I virkeligheden er løsningsmetoden til differentialligninger af anden orden væsentlig simplere end for første ordens. Dette hænger naturligvis blot sammen med, at det er meget lille udsnit af andenordens differentialligninger vi beskæftiger os med. Vi ser nemlig på typen:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+a\frac{dx}{dt}+bx=f(t)$$

Løsningsmetoden, er at man starter med at finde løsningen til den tilsvarende homogene differentialligning:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+a\frac{dx}{dt}+bx=0$$

Ved at indsætte funktionen $x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ fås idet

$$x'(t) = \lambda\cdot\mathrm{e}^{\lambda t} \quad \text{og} \quad x''(t) = \lambda^2\cdot\mathrm{e}^{\lambda t}$$

at

$$\lambda^2\cdot\mathrm{e}^{\lambda t} + a\cdot\lambda\cdot\mathrm{e}^{\lambda t} + b\cdot\mathrm{e}^{\lambda t} = 0 \qquad \Leftrightarrow$$

$$\lambda^2 + a\cdot\lambda + b = 0 \qquad \text{, idet } \mathrm{e}^{\lambda t}\neq 0 \text{ og således kan vi godt dividere}$$

Det drejer sig derfor nu om at løse denne andengradsligning, der kaldes *det karakteristiske polynomium*. Vi udregner på sædvanlig vis diskriminanten:

$$d = a^2 - 4\cdot b$$

- <u>Hvis $d > 0$:</u>

  Så findes der to reelle rødder λ_1 og λ_2, således at

  $$x_1(t)=e^{\lambda_1 t} \quad og \quad x_2(t)=e^{\lambda_2 t} \quad dvs$$
  $$\underline{\underline{x(t)=c_1\cdot e^{\lambda_1 t}+c_2\cdot e^{\lambda_2 t} \quad ,c_1,c_2\in R}}$$

  Dermed kan løsningsrummet også skrives som $L=span\{e^{\lambda_1 t};e^{\lambda_2 t}\}$

- <u>Hvis $d = 0$:</u>

  Så findes der én reel dobbeltrod λ_0, således at

  $$\lambda_0=-\frac{a}{2}$$
  $$\underline{\underline{x(t)=c_1\cdot e^{\lambda_0 t}+c_2\cdot t\cdot e^{\lambda_0 t} \quad ,c_1,c_2\in R}} \qquad eller$$
  $$L=span\{e^{\lambda_0 t};te^{\lambda_0 t}\}$$

- Hvis d < 0:

  Så findes der to komplekse rødder, således at

$$\lambda=\frac{-a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}=\frac{-a\pm\sqrt{(-1)(4b-a^2)}}{2}=\frac{-a\pm i\cdot\sqrt{4b-a^2}}{2}=-\frac{a}{2}\pm\frac{i\cdot\sqrt{4b-a^2}}{2}$$
$$\lambda=\alpha\pm i\cdot\beta$$

  Vi kan derfor opstille en kompleks løsningsfunktion z til differentialligningen:

$$z=k_1\cdot e^{(\alpha+i\beta)t}+k_2\cdot e^{(\alpha-i\beta)t}\quad ,k_1,k_2\in\ \mathbf{C}$$

  Hvis vi nu sætter $k_1 = k_2 = ½$, så fås:

$$x_1=\tfrac{1}{2}\cdot e^{(\alpha+i\beta)t}+\tfrac{1}{2}\cdot e^{(\alpha-i\beta)t}=\tfrac{1}{2}\cdot e^{\alpha t}\cdot e^{i\beta t}+\tfrac{1}{2}\cdot e^{\alpha t}\cdot e^{-i\beta t}=e^{\alpha t}\left(\frac{e^{i\beta t}+e^{-i\beta t}}{2}\right)=$$
$$e^{\alpha t}\cdot\cos(\beta\,t)$$

  idet vi i sidste led benytter os af en af Eulers formler.

  Tilsvarende sætter vi nu $k_1=\frac{1}{2i}\quad og\quad k_2=-\frac{1}{2i}$ Herved fås:

$$x_2=\tfrac{1}{2i}\cdot e^{(\alpha+i\beta t)}-\tfrac{1}{2i}\cdot e^{(\alpha-i\beta)t}=\tfrac{1}{2i}\cdot e^{\alpha t}\cdot e^{i\beta t}-\tfrac{1}{2i}\cdot e^{\alpha t}\cdot e^{-i\beta t}=e^{\alpha t}\left(\frac{e^{i\beta t}-e^{-i\beta t}}{2i}\right)=$$
$$e^{\alpha t}\cdot\sin(\beta\,t)$$

  Alt i alt fås således:

$$\underline{\underline{x(t)=c_1\cdot e^{\alpha t}\cdot\cos(\beta t)+c_2\cdot e^{\alpha t}\cdot\sin(\beta t)}}$$

Vi har nu fået løst den homogene ligning i alle tilfælde. Løsningsmetoden til den inhomogene differentialligning er, at man tager den fuldstændige løsning til den homogene differentialligning (som vi fandt ovenfor) og lægger en ”gættet” partikulær løsning til.

Fremgangsmåden til at finde den partikulære løsning:

- Hvis $f(t)$ = A, så er en partikulær løsning $u^* = \frac{A}{b}$
- Hvis $f(t)$ er et n'te grads polynomium, så findes der et n'te gradspolynomium med ukendte koefficienter, der kan bruges som partikulær løsning. Koefficienterne findes ved at differentiere den gættede partikulære løsning og sætte ind i differentialligningen.
- Hvis $f(t) = p\cdot e^{qt}$, så er en partikulær løsning $u^*=\dfrac{p}{q^2+aq+b}\cdot e^{qt}$

Dette kræver dog, at $q^2 + aq + b \neq 0$.

Hvis dette ikke er tilfældet, så kan man finde en konstant B, således at $B \cdot t \cdot e^{qt}$ bliver en partikulær løsning. Dette må så gøres på ”slavemetoden”, dvs. at der skal differentieres og indsættes i differentialligningen.

- Hvis $f(t) = p \cdot \sin(rt) + q \cdot \cos(rt)$

  Her er der heller ikke nogen ”easy way”, men man sætter

  $u^* = A \cdot \sin(rt) + B \cdot \cos(rt)$

  og sætter denne og dens afledede ind i differentialligningen, og dermed bestemmes konstanterne A og B.