Note til differentialer / totaldifferentiation

Vi starter med at definere differentialet:

$$y = f(x) \qquad dy = \frac{dy}{dx}dx = f'(x)dx$$

$$z = f(x,y) \quad dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = f_x^{'}(x,y)dx + f_y^{'}(x,y)dy$$

$$z = f(x_1, x_2, ..., x_n) \quad dz = \frac{\partial z}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2}dx_n + \cdots + \frac{\partial z}{\partial x_n}dx_n$$

Det er vigtigt at huske på denne definition. Vi tager altså differentialet af en funktion ved at tage den partielle afledede til hver af variablene, og sætte dx_n bag på. Specielt, hvis funktionen kun er af én variabel, så finder man differentialet ved at tage differentialkvotienten og gange med dx. (hvis variablen hedder x).

<u>Eks:</u> Vi betragter en ligning fra en klassisk model:

$$Y = C + I + G$$

Hvis Y er eksogent givet gælder:

$$\overline{Y} = C + I + G$$

$$\frac{d(\overline{Y})}{d\overline{Y}}d\overline{Y} = \frac{d(C)}{dC}dC + \frac{d(I)}{dI}dI + \frac{d(G)}{dG}dG \quad <=>$$

$$0d\overline{Y} = 1dC + 1dI + dG \quad <=>$$

$$dG = -dC - dI$$

Når vi differentierer produktionen får vi naturligvis 0, da denne er eksogent givent, og derfor i denne henseende må opfattes som en konstant. C, I og G differentieret i fht. hhv. C, I og G giver naturligvis alle blot 1. I denne model fås altså, at vi har fuld crowding out af investeringerne og det private forbrug tilsammen.

Der gælder en række regneregler for differentialet. Den første har vi faktisk allerede benyttet. Den siger, at differentialet af en sum (eller differens) er differentialet af hver af ledene. Altså:

$$d(f + g) = df + dg$$

Desuden gælder der, at vi kan gange konstanter på f og g således, at

$$d(af + bg) = a \cdot df \; + \; b \cdot dg$$

Den næste regel siger noget om differentialet af et produkt:

$d(f{\cdot}g) = g \cdot df \;\; + f \cdot dg$

Eks: Vi betragter funktionen $z = x^3 \cdot y^2$

$dz = y^2 \cdot d(x^3) + x^3 \cdot d(y^2) = y^2 \cdot 3x^2\, dx + x^3 \cdot 2y\, dy = 3x^2y^2\, dx \;+\; 2x^3y\, dy$

Eks: Vi betragter ligningen $M \cdot V = P \cdot Y$, idet vi antager at pengeomløbshastigheden V og produktionen Y er eksogent givne. Vi vil totaldifferentiere ligningen.

$$M \cdot \overline{V} = P \cdot \overline{Y}$$
$$\overline{V} \cdot dM + M \cdot d\overline{V} = \overline{Y} \cdot dP + P \cdot d\overline{Y}$$
$$\overline{V}dM + M \cdot 0 = \overline{Y} \cdot dP + P \cdot 0$$
$$\frac{\overline{V}dM}{M \cdot \overline{V}} = \frac{\overline{Y}dP}{P \cdot Y}$$
$$\frac{dM}{M} = \frac{dP}{P} \equiv \pi$$

Vi finder således, at væksten i pengemængden er lig med væksten i prisniveauet (inflationen).

Der gælder også en regel for differentialet af en brøk.

$$d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g \cdot df - f \cdot dg}{g^2} \quad , g \neq 0$$

Eks: Vi betragter funktionen $z = \dfrac{\ln x}{x^2}$

$$dz = d\left(\frac{\ln x}{x^2}\right) = \frac{x^2 \cdot \frac{1}{x}dx - \ln x \cdot 2xdx}{\left(x^2\right)^2} = \frac{xdx - 2x\ln xdx}{x^4} = \left(\frac{1}{x^3} - \frac{2\ln x}{x^3}\right)dx$$

Der gælder også en regel for differentialet af en sammensat funktion.

$$z = g\left(f(x,y)\right) \;\Rightarrow\; dz = g'\left(f(x,y)\right)df$$

Eks: Vi betragter funktionen $z = \ln\left(x^3 \cdot y^2\right)$

$$dz = d\left(\ln\left(x^3 \cdot y^2\right)\right) = \frac{1}{x^3 \cdot y^2} \cdot d\left(x^3 \cdot y^2\right) = \frac{1}{x^3 \cdot y^2} \cdot \left(y^2 \cdot d\left(x^3\right) + x^3 \cdot d\left(y^2\right)\right) =$$

$$\frac{1}{x^3 \cdot y^2} \cdot \left(y^2 \cdot 3x^2 dx + x^3 \cdot 2y dy\right) = \frac{3x^2 y^2 dx + 2x^3 y dy}{x^3 \cdot y^2} = \underline{\underline{\frac{3}{x} dx + \frac{2}{y} dy}}$$

Eks: 95 II (O) opg. 5

$$F(x, y) = x \cdot e^{\sin y} + z^2 x + yx^2 - (\ln z)^2 \quad , x, y \in \mathbf{R} \text{ og } z > 0$$

(1) Da $F(2,0,1) = 2 \cdot e^{\sin 0} + 1^2 \cdot 2 + 0 \cdot 2^2 - (\ln 1)^2 = 2 \cdot e^0 + 2 + 0 - 0 = 2 + 2 = \underline{\underline{4}}$

og $F_z'(x, y, z) = 2xz - \left(2 \ln z \cdot \frac{1}{z}\right) \Rightarrow F_y'(2,0,1) = 2 \cdot 2 \cdot 1 - (2\ln(1) \cdot 1) = 4 \underline{\underline{\neq 0}}$

så definerer ligningen $F(x, y, z) = 4$ implicit z som funktion $z = z(x, y)$ i en omegn af punktet $(x_0, y_0, z_0) = (2, 0, 1)$.

(2) $0 = e^{\sin y} \cdot 1 \cdot dx + x \cdot e^{\sin y} \cdot \cos y \cdot dy + x \cdot 2z \cdot dz + z^2 \cdot 1 \cdot dx + x^2 \cdot 1 \cdot dy + y \cdot 2x \cdot dx - 2\ln z \cdot \frac{1}{z} dz$

Nu indsætter vi punktet (2, 0, 1) i ligningen ovenfor:

$0 = dx + 2dy + 4dz + dx + 4dy \;\Leftrightarrow\; 4dz = -2dx - 6dy \;\Leftrightarrow\; \underline{\underline{dz = -\tfrac{1}{2} dx - \tfrac{3}{2} dy}}$

Dermed har vi samtidig, at $z_x' = -\frac{1}{2}$ *og* $z_y' = -\frac{3}{2}$

(3) Således kan vi finde tangentplanen vha.

$$z - z_0 = z_x'(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + z_y'(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$$
$$z - 1 = -\tfrac{1}{2}(x - 2) - \tfrac{3}{2}(y - 0) \;\Leftrightarrow\; \underline{\underline{z = -\tfrac{1}{2}x - \tfrac{3}{2}y + 2}}$$

Eks: MA2 (5.6.1.d)

$$\left.\begin{matrix} xu^3 + v = y^2 \\ 3uv - x = 4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} u^3 dx + 3xu^2 du + dv = 2y \cdot dy \\ 3v \cdot du + 3u \cdot dv - dx = 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} (3xu^2)du + (1) \cdot dv = (-u^3)dx + (2y)dy \\ (3v)du + (3u)dv = (1)dx + (0)dy \end{matrix}\right\}$$

Denne ligning kan løses på flere metoder, vi benytter determinantmetoden

$$du = \frac{\begin{vmatrix} 2y \cdot dy - u^3 dx & 1 \\ dx & 3u \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3xu^2 & 1 \\ 3v & 3u \end{vmatrix}} = \frac{-3u^4 dx + 6yu \cdot dy - dx}{9xu^3 - 3v} = \underline{\underline{\frac{-3u^4 - 1}{9xu^3 - 3v} dx + \frac{6yu}{9xu^3 - 3v} dy}}$$