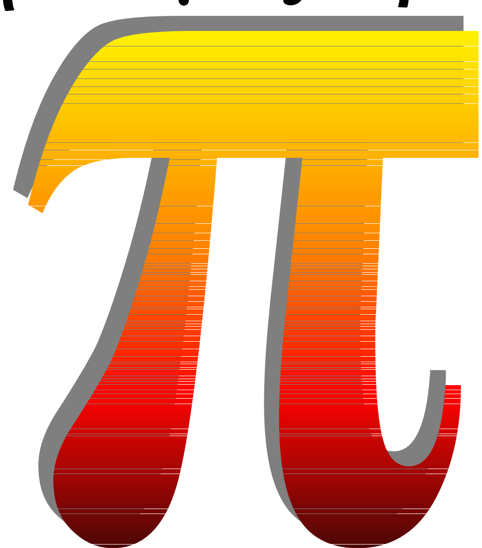
Kompendium til Lineær Algebra Politstudiets Første årsprøve

αβγδεζηθικλμνξοπρστυφχψω



ΑΒΓΔΕΖΗΘΙΚΛΜΝΞΟΠΠΣΤΥΦΧΨΩ

Indholdsfortegnelse :

Forord:

Dette kompendium er ment som en hjælp til at hurtigt at finde de relevante formler til brug ved opgaveregning i lineær algebra. Kompendiet er udarbejdet primært på baggrund af ”Lineær Algebra” af Mogens Nørgaard Olesen og Frank Hansen, og kompendiet bør benyttes sammen med denne lærebog. Man kan evt. også søge hjælp i Jens Carstensens ”Lineær Algebra”, der også er benyttet ved udarbejdelsen af dette kompendium. Der er ved de enkelte sætninger og definitioner givet en henvisning til lærebogen, som man som studerende kan benytte som reference.

Jeg håber, at mange vil finde fordele i anvendelsen af dette værk.

PS: Hvis du finder en fejl, så send mig en mail på: erik_bennike@hotmail.com.

Erik Bennike februar 2001

Elementær vektorregning (LA kap. 1)

Def.: ***Indre produkt***

Et indre produkt er en afbildning

$$(x, y) \to (x \mid y) \in \mathbf{R}, \quad \text{hvor} \quad (x, y) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$$

som opfylder betingelserne

- $(x|y) = (y|x)$
- $(x + y|z) = (x|z) + (y|z)$
- $(\lambda x|y) = \lambda(x|y)$ (LA def. 1.2.6)
- $(x|x) \geq 0$
- $(x|x) = 0 \iff x = \vec{0}$

hvor x, y, z er vektorer tilhørende $\mathbf{R}^n$ og λ er en skalar.

Def.: ***Skalarproduktet***

Et specielt indre produkt er skalarproduktet, der defineres ved

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \quad , \textit{hvor } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \textit{og} \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$ (LA def. 1.2.1)

Def.: ***Normen af en vektor***

Normen af en vektor ||x|| defineres som

$$\|x\| = \sqrt{(x|x)} \qquad \forall\, x \in \mathbf{R}^n$$ (LA s. 19)

Specielt er normen af en vektor med skalarproduktet som indre produkt givet ved

$$\|x\| = \sqrt{x \cdot x} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \qquad \forall\, x \in \mathbf{R}^n$$ (LA s. 18)

<u>Sætn.:</u> ***Regneregler for normer af vektorer***

- $\|x\| \geq 0$
- $\|x\| = 0 \iff x = \vec{0}$
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$
- $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$
- $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$

$\forall\, x, y \in \mathbf{R}^n$ og $\forall\, \lambda \in \mathbf{R}$. (LA Sætn. 1.2.10)

<u>Def.:</u> ***Vinkel mellem vektorer***

Vinklen θ mellem to vektorer x og y defineres ud fra

$$\cos\theta = \frac{(x|y)}{\|x\| \cdot \|y\|} \quad \Rightarrow \quad \theta = \cos^{-1}\left(\frac{(x|y)}{\|x\| \cdot \|y\|}\right)$$ (LA s. 23)

<u>Def.:</u> ***Hyperplan***

En mængde H kaldes en hyperplan hvis

$$H = \{y \in \mathbf{R}^n \mid a \cdot (y - x) = 0\}$$ (LA s. 25)

a kaldes en normalvektor for hyperplanen og x er et fast punkt i hyperplanen.

<u>Def.:</u> ***Underrum***

Lad U være en ikke-tom delmængde af vektorrummet $\mathbf{R}^n$. U kaldes et underrum hvis

- $x + y \in U \quad \forall\, x, y \in U$
- $\lambda x \in U \quad \forall\, \lambda \in \mathbf{R} \wedge \forall\, x \in U$ (LA def. 1.4.1)

De to betingelser kan samles til

- $\lambda x + \mu y \in U \quad \forall\, \lambda, \mu \in \mathbf{R} \wedge \forall\, x, y \in U$ (LA sætn. 1.4.4)

<u>Def.:</u> ***Udspændingen af en mængde***

Lad M være en ikke-tom delmængde af $\mathbf{R}^n$. Ved udspændingen af M forstås mængden

$$span\ M = \left\{\sum_{i=1}^{p} \lambda_i a_i \middle| \lambda_i \in R,\ a_i \in M,\ p \in N\right\}$$ (LA def. 1.4.7)

af linearkombinationer af vektorer fra M.

Hvis M er en endelig mængde af vektorer dvs. $M = \{a_1, a_2, \dots, a_p\}$, så kaldes span M for udspændingen af vektorerne $a_1, a_2, \dots, a_p$.

<u>Sætn.:</u> ***Udspændingen af en mængde er et underrum***

Udspændingen af en ikke-tom mængde M, der er en delmængde af $\mathbf{R}^n$, er et underrum af $\mathbf{R}^n$. Hvis U er et underrum af $\mathbf{R}^n$ og M er en delmængde af U, så er span M en delmængde af U. Udspændingen af en mængde er det mindste underrum der indeholder mængden.

(LA sætn. 1.4.8 & s. 31ø)

<u>Sætn.:</u> ***Fællesmængden mellem underrum***

Fællesmængden mellem vilkårlig mange underrum af $\mathbf{R}^n$ er selv et underrum af $\mathbf{R}^n$.

(LA sætn. 1.4.11)

<u>Sætn.:</u> ***Sum af vektorer fra forskellige underrum***

Lad der være givet endelig mange underrum $U_1, U_2, \dots, U_p$ af $\mathbf{R}^n$. Mængden

$$U = \{x = x_1 + x_2 + \cdots + x_p \mid x_1 \in U_1, x_2 \in U_2, \dots, x_p \in U_p\} \qquad \text{(LA sætn. 1.4.12)}$$

er et underrum af $\mathbf{R}^n$.

<u>Sætn.:</u> ***Direkte sum af underrum***

Summen af n underrum er direkte, hvis og kun hvis den eneste fremstilling af nulvektoren fremkommer som den trivielle fremstilling, hvor alle led selv er nulvektoren. For at en sum mellem n underrum <u>ikke</u> skal være direkte skal der altså gælde, at nulvektoren kan fremstilles som summen af to eller flere egentlige vektorer fra forskellige underrum.
Summen mellem <u>to</u> underrum U_1 og U_2 er direkte, hvis og kun hvis fællesmængden $U_1 \cap U_2$ kun indeholder nulvektoren. (LA s. 33 mv.)
At en sum mellem underrum er direkte skrives som

$$U = U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_p$$

Matricer (LA kap. 2)

VIGTIGT: Husk at når der skrives at en matrix $A \in R_n^m$, så menes der en matrix med m rækker og n søjler. Benævnes også tit som en "$m \times n$ matrix", og udtales "m kryds n matrix".

Sætn.: ***Regneregler for matricer.***

- $A + B = B + A$ *kommutativ lov*
- $A + (B + C) = (A + B) + C$ *associativ lov*
- $A + O_{m\times n} = O_{m\times n} + A = A$
- *Der findes en entydigt bestemt matrix* $-A = (-1)A$ *for hvilken* $(-A) + A = A + (-A) = O_{m\times n}$

for alle $m \times n$ *matricer* A, B *og* C. (LA s. 47)

Desuden gælder der følgende regneregler for skalarer og matricer

- $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
- $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
- $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$
- $1A = A$

(LA s. 47)

for alle $m \times n$ matricer A og B og skalarer $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$.

Addition og subtraktion af matricer foregår ved koordinatvis addition/subtraktion.
Tilsvarende foregår multiplikation med skalarer ved koordinatvis multiplikation.

Def.: ***Matrixmultiplikation***

Først slår vi fast at matrixmultiplikation ikke er kommutativ (dvs. $A \cdot B \neq B \cdot A$).

For at kunne definere matrixproduktet er det nødvendigt at indføre lidt yderligere notation Vi kalder den i'te række i matrix A for vektoren a^i og den j'te søjle i matrix B for vektoren b_j. Matrixproduktet defineres ved

$$A_n^m \cdot B_p^n = AB = \begin{pmatrix} a^1 \cdot b_1 & a^1 \cdot b_2 & \cdots & a^1 \cdot b_p \\ a^2 \cdot b_1 & a^2 \cdot b_2 & \cdots & a^2 \cdot b_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^m \cdot b_1 & a^m \cdot b_2 & \cdots & a^m \cdot b_p \end{pmatrix}$$

Vi bemærker at søljeantallet i den første matrix skal være lig rækkeantallet i den anden matrix. Således kan den omvendte multiplikation altså kun lade sig gøre, hvis $p = m$.

Ved multiplikationen er række- og søjleantallet i den fremkomne matrix altså bestemt af: Den første matrix bestemmer rækkeantallet og den anden matrix bestemmer søjleantallet.

Sætn.: ***Regneregler for matrixmultiplikation***

- $A(B+C)=AB+AC \qquad A\in R_n^m,\ B,C\in R_p^n$
- $(A+B)C=AC+BC \qquad A,B\in R_n^m,\ C\in R_p^n$
- $(\lambda A)B=A(\lambda B)=\lambda(AB) \qquad \lambda\in R,\quad A\in R_n^m \quad og \quad B\in R_p^n$
- $(AB)C=A(BC) \qquad A\in R_n^m, B\in R_p^n, C\in R_q^p$

(LA sætn. 2.2.4/5)

Def.: ***Regularitet / invertibilitet af kvadratiske matricer***

En kvadratisk matrix A kaldes regulær (invertibel) hvis der findes en kvadratisk $n\times n$ matrix B, således at $A\cdot B = B\cdot A = E_n$ (LA def. 2.2.7)

hvor E_n er enhedsmatricen. Matricen B kaldes A's inverse matrix (og omvendt), og den benævnes A^{-1}.

Sætn.: ***Regularitet af inverse matricer***

Lad A være en regulær matrix. Så er den inverse matrix A^{-1} også regulær, og A er dennes inverse matrix, dvs. $(A^{-1})^{-1} = A$ (LA sætn. 2.2.9)

Sætn.: ***Inverst matrixprodukt***

Lad A og B være regulære matricer. Så er også matrixproduktet AB regulært og den inverse matrix til matrixproduktet er matricen $(AB)^{-1} = B^{-1}\cdot A^{-1}$ (LA sætn. 2.2.10)

Bemærk rækkefølgen!

Def.: ***Transponeret matrix***

Den transponerede matrix til A benævnes A^t og fremkommer ved at ombytte rækker og søjler i A.

Der gælder endvidere følgende

- $(A+B)^t = A^t + B^t$
- $(\lambda A)^t = \lambda A^t$ (LA def. 2.2.12)
- $(A^t)^t = A$

Def.: ***Transponering af matrixprodukt***

Lad A være en $m \times n$ matrix og B være en $p \times m$ matrix. Der gælder

$(BA)^t = A^tB^t$ (LA sætn. 2.2.14)

Bemærk rækkefølgen!

Sætn.: ***Regularitet af transponeret matrix***

En kvadratisk matrix A er regulær, hvis og kun hvis den transponerede matrix A^t er regulær.

Endvidere gælder det, at $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$ for enhver regulær matrix A

(LA sætn. 2.2.15)

Lineære ligningssystemer (LA kap. 3)

Def.: ***Ækvivalens af to ligningssystemer***

To ligningssystemer kaldes ækvivalente, hvis de har samme løsningsmængde.

(LA def. 3.1.3)

Def.: ***Omformninger af lineære ligningssystemer***

Omformningerne $æ_{ij}(c)$, $ø_i(c)$ og $å_{ij}$ af et lineært ligningssystem bestående af m ligninger med n ubekendte defineres ved:

$æ_{ij}(c)$: For $i \neq j$ multipliceres den j'te ligning med konstanten c og resultatet lægges til den i'te ligning.

$ø_i(c)$: Den i'te ligning multipliceres med konstanten $c \neq 0$.

$å_{ij}$: Den i'te ligning ombyttes med den j'te.

(LA def. 3.1.4)

Disse svarer til rækkeoperationerne i matricer, der leder til at echelonmatricen og det oprindelige ligningssystem (matrix) er ækvivalente. (LA sætn. 3.1.5)

Def.: ***Initialettal og echelonmatrix***

Et initialettal i en matrix indføres således: Hvis det første fra 0 forskellige element i en række er 1, så kaldes dette ettal for et initialettal. (LA s. 68)

En $m \times n$ matrix F kaldes en echelonmatrix hvis følgende er opfyldt:

- Enhver række, bortset fra evt. nulrækker har et initialettal.
- Over og under alle initialettaller står der lutter nuller.
- Hvis to rækker ikke er nulrækker, står initialettallet i den øvre række i en søjle længere til venstre end initialettallet i den nedre.
- Evt. nulrækker står nederst i matricen.

(LA def. 3.2.1)

Sætn.: ***Echelonsætningen***

En $m \times n$ matrix kan ved rækkeomformninger omformes til en echelonmatrix

(LA sætn. 3.2.3)

Sætn.: ***Initialettal og konsistens***

Hvis der i den udvidede koefficientmatrix til en givent lineært ligningssystem står et initialettal i søjlen længst til højre, da er ligningssystemet inkonsistent.
Hvis dette ikke er tilfældet, da er ligningssystemet konsistent. (LA sætn. 3.2.5)

Operationsmatricer (LA kap. 4)

Sætn.: ***Rækkeoperationer og operationsmatricer***

Lad $A = (a_{ij})$ være en $m \times n$ matrix.

- Resultatet af rækkeoperationen $æ_{ij}(c)$ udført på matricen A er lig med matrixproduktet af $m \times m$ operationsmatricen $Æ_{ij}(c)$ og A.
- Resultatet af rækkeoperationen $ø_i(c)$ udført på matricen A er lig med matrixproduktet af $m \times m$ operationsmatricen $Ø_i(c)$ og A.
- Resultatet af rækkeoperationen $å_{ij}$ udført på matricen A er lig med matrixproduktet af $m \times m$ operationsmatricen $Å_{ij}$ og A.

(LA sætn. 4.1.1)

Sætn.: ***Inversion af operationsmatricer***

Samtlige operationsmatricer er regulære.

- $Æ_{ij}(c)$ *for* $i \neq j,\ i, j = 1,\ldots,m.$ *Den inverse matrix er* $Æ_{ij}(c)^{-1} = Æ_{ij}(-c)$
- $Ø_i(c)$ *for* $c \neq 0,\ i = 1,\ldots,m.$ *Den inverse matrix er* $Ø_i(c)^{-1} = Ø_i\left(\frac{1}{c}\right)$
- $Å_{ij}$ *for* $i, j = 1,\ldots,m.$ *Den inverse matrix er* $Å_{ij}^{-1} = Å_{ij}$

(LA kor. 4.1.2)

Sætn.: ***Operationsmatricer og Echelonmatrix***

Lad A være en $m \times n$ matrix. Der findes en $m \times n$ echelonmatrix F og en regulær $m \times m$ matrix R således at $A = R \cdot F$. Matricen R kan skrives som et produkt $R = R_1 \cdot R_2 \cdots R_n$ af operationsmatricer. (LA sætn. 4.1.3)

Sætn.: ***Invertering af matricer***

En $n \times n$ matrix A er regulær, hvis og kun hvis der findes $n \times n$ operationsmatricer $R_1, R_2, \ldots, R_p$ for hvilke

$$R_1 R_2 \cdots R_p (A \quad E_n) = (E_n \quad B)$$ (LA sætn. 4.2.2)

I givet fald er $A^{-1} = B$.

<u>Sætn.:</u> ***Invertering af diagonalmatrix***

Invertering af en regulær diagonalmatrix foregår ved på hver plads i diagonalen at tage den reciprokke værdi til det pågældende diagonalelement.

<u>Sætn.:</u> ***Invertering af 2×2 matrix.***

Invertering af en 2×2 matrix foregår således:

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

Basis og dimension (LA kap. 5)

Def.: ***Lineær afhængighed og lineær relation***

Lad $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ være et sæt af vektorer fra $\mathbf{R}^n$. En fremstilling af nulvektoren som en linearkombination $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_p a_p = \vec{0}$
af $a_1, a_2, \ldots,\ a_p$ kaldes en lineær relation mellem sættets vektorer. Hvis alle koefficienterne $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ er nul, kaldes fremstillingen triviel eller uegentlig. Hvis dette ikke er tilfældet kaldes fremstillingen ikke-triviel eller egentlig.
Et sådant sæt af vektorer kaldes lineært afhængigt, hvis der findes en egentlig lineær relation mellem sættets vektorer. Ellers kaldes sættet for lineært uafhængigt. (LA 5.1(.1))

Bemærk specielt, at et sæt af vektorer aldrig kan være lineært uafhængigt, hvis to eller flere af vektorerne i sættet er proportionale. (LA s. 94)

Et vektorsæt, hvor mindst en af vektorerne er nulvektoren er altid lineær afhængigt. (LA s. 95ø)

Sætn.: ***Linear afhængighed og linearkombination***

Lad $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ være et sæt af vektorer i $\mathbf{R}^n$. Sættet er lineært afhængigt, hvis og kun hvis (mindst) en af vektorerne kan skrives som en linearkombination af de øvrige. Eller:
Et sæt af vektorer er lineært afhængigt, hvis og kun hvis (mindst) en af vektorerne tilhører udspændingen af de øvrige. (LA sætn. 5.1.4)

Sætn.: ***Suppleringssæt og delsæt (lineær (u)afhængighed)***

Lad $a_1, a_2, \ldots, a_p$ være vektorer i $\mathbf{R}^n$.

- Hvis sættet $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ er lineært afhængigt, så er ethvert sæt af vektorer, som fremkommer ved at supplere det givne sæt også lineært afhængigt.
- Hvis sættet $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ er lineært uafhængigt, så er ethvert delsæt også lineært uafhængigt. (LA sætn. 5.1.7)

Def.: ***Basis for et underrum***

Lad U være et underrum af $\mathbf{R}^n$, og lad $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ være et sæt af vektorer i U. Vi kalder sættet $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ en basis for U, hvis det er lineært uafhængigt og udspænder U.

(LA def. 5.2.1)

Sætn.: ***Grassmanns udskiftningssætning***

Lad $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ være et lineært uafhængigt sæt af vektorer i $\mathbf{R}^n$ og lad U = span $\{a_1, a_2, \ldots, a_p\}$ være underrummet frembragt af vektorerne i sættet. Hvis $(b_1, b_2, \ldots, b_q)$ er et lineært uafhængigt sæt af vektorer fra U, så gælder der at $q \leq p$. Endvidere kan man udskifte q af vektorerne i sættet $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ med vektorerne $b_1, b_2, \ldots, b_q$, så det på denne måde fremkomne sæt er lineært uafhængigt og frembringer underrummet U.

(LA sætn. 5.2.4)

Sætn.: ***Baser for underrum og antal af vektorer***

Lad U være et underrum af $\mathbf{R}^n$. Hvis $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ og $(b_1, b_2, \ldots, b_q)$ begge er baser for U, gælder det at $p = q$. (LA kor. 5.2.5)

Endvidere: Hvis $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ er et lineært uafhængigt sæt af vektorer i $\mathbf{R}^n$, gælder der at $p \leq n$. (LA kor. 5.2.6)

Sætn.: ***Eksistens af basis til underrum***

Ethvert underrum af $\mathbf{R}^n$ har en basis. (LA sætn. 5.2.7)

Def.: ***Dimension af et underrum***

Lad U være et underrum af $\mathbf{R}^n$. Ved dimensionen af U forstås antallet af vektorer i en basis for U. Dimensionen af U betegnes med dim U. (LA def. 5.2.8)

Sætn.: ***Suppleringssætningen***

Lad U være et underrum af $\mathbf{R}^n$ af dimension p. Hvis $q < p$, og $(a_1, a_2, \ldots, a_q)$ er et lineært uafhængigt sæt af vektorer i U, så findes der supplerende vektorer $u_{q+1}, \ldots, u_p$, i U for hvilke det supplerende sæt $(a_1, a_2, \ldots, a_p, u_{q+1}, \ldots, u_p)$ er en basis for U. (LA sætn. 5.2.10)

Sætn.: ***Dimension og direkte sum af underrum***

Hvis $U_1, U_2, \ldots, U_p$ er underrum af $\mathbf{R}^n$, som danner direkte sum $U = U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_p$, så gælder der, at

$$\dim U = \dim U_1 + \dim U_2 + \ldots + \dim U_p \leq n \qquad \text{(LA sætn. 5.2.12)}$$

Def.: ***Ortonormalitet af vektorsæt***

Et sæt af vektorer $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ kaldes ortonormalt (et ortonormalt sæt) hvis vektorerne i sættet er enhedsvektorer og indbyrdes ortogonale. (LA s. 114)

Sætn.: ***Ortonormering af vektorsæt (Gram-Schimdts ortonormaliseringsmetode)***

Lad $\mathbf{R}^n$ være udstyret med et indre produkt $(\cdot|\cdot)$. Hvis $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ er et lineært uafhængigt sæt af vektorer i $\mathbf{R}^n$, så findes der et ortonormalt sæt $(b_1, b_2, \ldots, b_p)$ for hvilket

$$\operatorname{span}\{b_1, \ldots, b_i\} = \operatorname{span}\{a_1, \ldots, a_i\} \quad \text{for } i = 1, 2, \ldots, p \qquad \text{(LA s. 115)}$$

Måden hvorpå man finder disse ortonormale vektorer er som følger:

Først dannes vektorerne $(c_1, c_2, \ldots, c_p)$, og derefter normeres de til sættet $(b_1, b_2, \ldots, b_p)$:

$$\begin{aligned}
c_1 &= a_1 \\
c_2 &= a_2 - \frac{(a_2|c_1)}{(c_1|c_1)} c_1 \\
c_3 &= a_3 - \frac{(a_3|c_1)}{(c_1|c_1)} c_1 - \frac{(a_3|c_2)}{(c_2|c_2)} c_2 \\
&\vdots \\
c_p &= a_p - \frac{(a_p|c_1)}{(c_1|c_1)} c_1 - \frac{(a_p|c_2)}{(c_2|c_2)} c_2 - \cdots - \frac{(a_p|c_{p-1})}{(c_{p-1}|c_{p-1})} c_{p-1}
\end{aligned}$$

$$b_1 = \frac{1}{\|c_1\|} c_1, \quad b_2 = \frac{1}{\|c_2\|} c_2, \quad \ldots \quad , b_p = \frac{1}{\|c_p\|} c_p \qquad \text{(LA s. 115-116)}$$

Sætn.: ***Eksistens af ortonormalbasis for underrum***

Ethvert underrum af et euklidisk vektorrum, som er forskelligt fra det trivielle underrum kun bestående af nulvektoren, har en ortonormalbasis. (LA kor. 5.3.2)

<u>Sætn.:</u> ***Supplering til ortonormalt sæt i euklidisk vektorrum***

Lad U være et underrum af dimension q i et euklidisk vektorrum ($\mathbf{R}^n$, $(\cdot|\cdot)$), og lad $(a_1, a_2, \dots, a_p)$ være et ortonormalt sæt af vektorer i U. Hvis $p < q$, så findes der supplerende vektorer $u_{p+1}, \dots, u_q$ således at sættet $(a_1, a_2, \dots, a_p, u_{q+1}, \dots, u_p)$ udgør en ortonormalbasis for U. (LA sætn. 5.3.4)

<u>Sætn.:</u> ***Vektorer og ortonormalbasis***

Lad ($\mathbf{R}^n$, $(\cdot|\cdot)$) være et euklidisk vektorrum udstyret med en ortonormalbasis $(a_1, a_2, \dots, a_p)$. Der gælder

$$x = \sum_{i=1}^{n} (x|a_i)a_i \qquad \text{for enhver vektor } x \in \mathbf{R}^n. \qquad \text{(LA sætn. 5.3.5)}$$

<u>Sætn.:</u> ***Det ortogonale komplement***

Lad M være en ikke-tom delmængde af et euklidisk vektorrum ($\mathbf{R}^n$, $(\cdot|\cdot)$). Mængden af vektorer

$$M^{\perp} = \{ x \in \mathbf{R}^n \mid (x|y) = 0 \ \ \forall\, y \in M\} \qquad \text{(LA s. 118m)}$$

som er ortogonale på samtlige vektorer er et underrum af $\mathbf{R}^n$.

Lad U være et underrum af et euklidisk vektorrum ($\mathbf{R}^n$, $(\cdot|\cdot)$). Underrummet $U^{\perp}$ har dimension $n - \dim U$ og kaldes det ortogonale komplement til U. Der gælder at

$U^{\perp\perp} = (U^{\perp})^{\perp} = U$. Underrummene U og $U^{\perp}$ danner direkte sum med summen $\mathbf{R}^n$.

(LA sætn. 5.3.6)

Lineære afbildninger (LA kap. 6)

Def.: ***Lineær afbildning***

En afbildning $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, hvor n og m er to naturlige tal, kaldes lineær, hvis

$T(\lambda x + \mu y) = \lambda Tx + \mu Ty \qquad \forall\ \lambda, \mu \in \mathbf{R} \quad \forall\ x, y \in \mathbf{R}^n$ (LA def. 6.1.1)

En vilkårlig lineær afbildning $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ afbilder nulvektoren i $\mathbf{R}^n$ på nulvektoren i $\mathbf{R}^m$.
Endvidere gælder det at $T(-x) = -Tx$.
Billedet ved en lineær afbildning T af en linearkombination af vektorerne $a_1, a_2, \ldots, a_p$ er en linearkombination af vektorerne $Ta_1, Ta_2, \ldots, Ta_p$ med de samme koefficienter

T (span M) = span $T(M)$

Sætn.: ***Lineær afhængighed af billederne af vektorsæt***

Lad $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ være en lineær afbildning og lad $a_1, a_2, \ldots, a_p \in \mathbf{R}^n$. Der gælder følgende:

- Hvis vektorsættet $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ er lineært afhængigt, medfører det, at også sættet $(Ta_1, Ta_2, \ldots, Ta_p)$ er lineært afhængigt.
- Hvis vektorsættet $(Ta_1, Ta_2, \ldots, Ta_p)$ er lineært uafhængigt, medfører det, at også sættet $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ er lineært uafhængigt, og at T er en injektiv afbildning.
- dim $T(U) \leq$ dim U for ethvert underrum U af $\mathbf{R}^n$. (LA sætn. 6.1.2)

Def.: ***Billedrum og nulrum***

Lad $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ være en lineær afbildning. Billedmængden

$R(T) = \{Tx \mid x \in \mathbf{R}^n\}$

kaldes billedrummet for T og mængden

$N(T) = \{\, x \in \mathbf{R}^n \mid Tx = \vec{0} \,\}$

kaldes nulrummet (kernen) for T. (De vektorer, der når de afbildes via T bliver nulvektoren)
En afbildning $\phi : M_1 \to M_2$ kaldes surjektiv, hvis $\phi(M_1) = M_2$. (LA def. 6.1.3)
En afbildning er surjektiv hvis og kun hvis dim $R(T) = m$, og dermed skal $m \leq n$ for at en afbildning skal have mulighed for at være surjektiv. En nødvendig, men ikke tilstrækkelig betingelse.

Sætn.: ***Surjektivitet og billedrum***

Lad $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ være en basis for $\mathbf{R}^n$, og lad $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ være en lineær afbildning.

- Billedrummet $R(T)$ frembringes af sættet $(Ta_1, Ta_2, \ldots, Ta_n)$.
- T er surjektiv, hvis og kun hvis sættet $(Ta_1, Ta_2, \ldots, Ta_n)$ frembringer hele $\mathbf{R}^m$.
- $\dim R(T) \leq n$ (LA sætn. 6.1.4)

Sætn.: ***Nulrum og underrum***

Nulrummet $N(T)$ for en lineær afbildning $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ er et underrum af vektorrummet $\mathbf{R}^n$.

(LA sætn. 6.1.5)

En afbildning mellem to mængder kaldes injektiv, hvis forskellige punkter fra "startmængden" ikke kan afbildes i samme punkt i "destinationsmængden".

Sætn.: ***Injektivitet og nulrum***

En lineær afbildning $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ er injektiv, hvis og kun hvis $N(T) = \{\vec{0}\}$. $\dim N(T) = 0$

(LA sætn. 6.1.6)

Sætn.: ***Lineær uafhængighed og injektivitet***

Lad $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ være en basis for $\mathbf{R}^n$, og lad $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ være en lineær afbildning. Der gælder, at T er injektiv, hvis og kun hvis sættet $(Ta_1, Ta_2, \ldots, Ta_n)$ er lineært uafhængigt.

(LA sætn. 6.1.7)

Sætn.: ***Billedrum og surjektivitet samt injektivitet***

Lad $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ være en lineær afbildning. Der gælder følgende:

- T er surjektiv, hvis og kun hvis $\dim R(T) = m$.
- T er injektiv, hvis og kun hvis $\dim R(T) = n$. (LA kor. 6.1.8)

En afbildning kaldes bijektiv, hvis den både er injektiv og surjektiv.

For at en lineær afbildning skal være bijektiv skal således $n = m$, altså en afbildning: $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$. En sådan afbildning kaldes en endomorfi.

<u>Sætn.:</u> ***Endomorfi og injektivitet / surjektivitet / bijektivitet***

Lad $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ være en endomorfi. Så gælder det at hvis:

T er surjektiv <=> T er injektiv <=> T er bijektiv (LA kor. 6.1.9)

Ikke forstået sådan at alle endomorfier har de ovenstående egenskabet, blot forstået sådan, at hvis den har én af egenskaberne, så har den automatisk dem alle tre.

<u>Sætn.:</u> ***Grassmanns dimensionssætning***

Lad $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ være en lineær afbildning. Der gælder at

$\dim R(T) + \dim N(T) = n$ (LA sætn. 6.1.11)

<u>Sætn.:</u> ***Regning med lineære afbildninger***

Først definerer vi summen af to lineære afbildninger.

Lad $T, S : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ være to lineære afbildninger. Vi definerer:

$(T + S)(x) = Tx + Sx \qquad \forall\, x, y \in \mathbf{R}^n$

Denne er også en lineær afbildning (sætn.) (LA s. 135)

Vi definerer også produktet af T med en skalar λ:

$(\lambda T)(x) = \lambda Tx \qquad \forall\, x \in \mathbf{R}^n$

Denne afbildning er også en lineær afbildning (sætn.) (LA s. 135)

Ved differensen $T - S$ mellem to lineære afbildninger forstås

$T - S = T + (-1)S$

Denne afbildning er også en lineær afbildning. (LA s. 135)

<u>Sætn.:</u> ***Sammensat og invers lineær afbildning***

Lad $S : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ og $T : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^p$ være lineære afbildninger. Den sammensatte afbildning $T \circ S : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^p$ er også lineær. (LA sætn. 6.2.2)

Lad $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ være en bijektiv, lineær afbildning. Den inverse afbildning $T^{-1} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ er også lineær. (LA sætn. 6.2.3)

<u>Sætn.:</u> ***Adjungeret afbildning***

Lad $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ være en lineær afbildning mellem euklidiske vektorrum. Der findes en entydigt bestemt lineær afbildning $T^* : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ for hvilken

$(Tx \mid y) = (x \mid T^* y) \quad \forall\, x \in \mathbf{R}^n,\ \forall\, y \in \mathbf{R}^m$ (LA sætn. 6.3.1)

Afbildningen T^* kaldes den til T adjungerede afbildning.

Sætn.: ***Nulrum, billedrum og adjungeret afbildning***

Lad $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ være en lineær afbildning mellem euklidiske vektorrum. Der gælder

$N(T) = R(T^*)^{\perp}$ (LA sætn. 6.3.3)

idet T^* er den til T adjungerede afbildning.

Sætn.: ***Sum, produkt og skalarmultiplikation af adjungeret afbildning***

Lad $T, S : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ være lineære afbildninger mellem euklidiske vektorrum. Det gælder at

- $(T + S)^* = T^* + S^*$
- $(\lambda T)^* = \lambda T^* \quad , \lambda \in \mathbf{R}$ (LA øv. 6.3.5)

Lad nu $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ og $S : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^p$ være lineære afbildninger mellem euklidiske vektorrum. Det gælder at

- $(ST)^* = T^* S^*$ (LA øv. 6.3.5)

Bemærk rækkefølgen!

Def.: ***Symmetrisk / selvadjungeret endomorfi***

En endomorfi af et euklidisk vektorrum kaldes symmetrisk eller selvadjungeret, hvis

$T^* = T$ (LA def. 6.3.6)

Sætn.: Lad T, S være endomorfier af et euklidisk vektorrum $(\mathbf{R}^n, (\cdot|\cdot))$ for hvilke

$(Tx \mid x) = (Sx \mid x) \quad \forall\, x \in \mathbf{R}^n$ (LA sætn. 6.3.8)

Hvis T og S er selvadjungerede, så gælder det at $T = S$.

Sætn.: ***Regneregler for normen af lineære afbildninger***

Lad $T, S : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ være lineære afbildninger mellem euklidiske vektorrum. Der gælder at

- $\|Tx\| \le \|T\| \cdot \|x\| \quad \forall\, x \in \mathbf{R}^n$
- $\|T + S\| \le \|T\| + \|S\|$
- $\|\lambda T\| = |\lambda| \cdot \|T\| \quad \forall\, \lambda \in \mathbf{R}$ (LA sætn. 6.3.10)

Lad $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ og $S : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^p$ være lineære afbildninger mellem euklidiske vektorrum.

- $\|ST\| \leq \|S\| \cdot \|T\|$ (LA øv. 6.3.11)

<u>Sætn.:</u> ***Normen af adjungeret afbildning***

Lad $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ være en lineær afbildning mellem euklidiske vektorrum. Der gælder at

$T^{**} = T$ og $\|T^*\| = \|T\|$ og $\|T^*T\| = \|T\|^2$ (LA sætn. 6.3.12)

<u>Def.:</u> ***Isometri***

En lineær afbildning $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ kaldes en isometri, hvis

$\| Tx \| = \| x \| \quad \forall\, x \in \mathbf{R}^n$ (LA def. 6.4.5)

Lineære afbildningers matrixligninger (LA kap. 7)

Sætn.: ***Lineære afbildninger og matricer***

Til enhver lineær afbildning $T : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ er der knyttet en $m \times n$ matrix A, således at det gælder: $Tx = y \iff Y = AX \quad \forall\, x \in \mathbf{R}^n \quad \forall\, y \in \mathbf{R}^m$ (LA s. 155)

Her betegner X og Y koordinatsøjlerne for hhv. x og y – alt dette naturligvis for et givent valg af baser i de to vektorrum $\mathbf{R}^n$ og $\mathbf{R}^m$.

Koordinatsøjlerne i A er billederne af basisvektorerne i $\mathbf{R}^n$.

Sætn.: ***Regning med lineære afbildningers matricer***

For lineære afbildninger $T, S : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ gælder der, at

- $A_{T+S} = A_T + A_S$
- $A_{\lambda T} = \lambda \cdot A_T \quad \lambda \in \mathbf{R}$ (LA sætn. 7.1.2)

Lad $T : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ og $S : \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^p$ være lineære afbildninger. Der gælder at

- $A_{S \circ T} = A_S \cdot A_T$ (LA sætn. 7.1.3)

Sætn.: ***Matrix hørende til bijektiv afbildning***

Lad $T : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ være en bijektiv lineær afbildning. Matricen A_T er regulær og den inverse matrix: $(A_T)^{-1} = A_{T^{-1}}$ (LA sætn. 7.1.4)

Sætn.: ***Adjungeret afbildning og transponeret matrix***

Lad $T : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ være en lineær afbildning mellem euklidiske vektorrum udstyret med ortonormale baser $(g_1, g_2, \ldots, g_n)$ og $(f_1, f_2, \ldots, f_m)$, og lad A være matricen hørende til T med hensyn til de valgte baser. Den transponerede matrix A^t er den til den adjungerede afbildning T^* hørende matrix med hensyn til det samme valg af baser. (LA sætn. 7.1.5)

Def.: ***Rangen af en matrix***

Ved rangen af en matrix forstås det største mulige antal søjler i noget lineært uafhængigt delsæt udtaget blandt søjlerne i matricen. (LA def. 7.2.1)

Rangen af matrix A skrives som rg A.

Med hensyn til den kanoniske basis, så er søjlerne i matricen A koordinatsæt for vektorerne $Te_1, Te_2, \ldots Te_n$ og frembringer derfor billedrummet $R(T)$. Dvs.

$$\text{rg } A = \dim R(T)$$

Undertiden benyttes betegnelsen $R(A)$ som $R(T)$ og tilsvarende for nulrummet $N(A) = N(T)$.

Def.: ***Grassmanns dimensionssætning for matricer***

Lad A være en $m \times n$ matrix. Der gælder

$$\text{rg } A + \dim N(A) = n$$ (LA sætn. 7.2.2)

Antallet af exogene variable er lig med dim $N(A)$. Således er antallet af endogene variable lig med rg A, altså lig antallet af søjler i den til A hørende echelonmatrix, der indeholder et initialettal. n er antallet af søjler i A.

Sætn.: ***Søjlerang og rækkerang***

Lad A være en $m \times n$ matrix. Der gælder at rækkerang A = søjlerang A

(LA sætn. 7.2.5)

Sætn.: ***Konsistens af lineære ligningssystemer og rang af matrix***

Et lineært ligningssystem er konsistent, hvis og kun hvis rangen af ligningssystemets koefficientmatrix er lig med rangen af den udvidede koefficientmatrix. (LA sætn. 7.3.1)

Def.: ***Homogene ligningssystemer***

Et lineært ligningssystem kaldes homogent, hvis konstantsøjlen

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$ (LA def. 7.3.2)

Ellers kaldes ligningssystemet for inhomogent.

Sætn.: ***Entydig løsning til lineært ligningssystem og rang af matrix***

Antag af et lineært ligningssystem S er konsistent. Løsningen til S er entydig, hvis og kun hvis rg $A = n$ (LA sætn. 7.3.3)

Sætn.: ***Løsningsmængde til homogent og inhomogent ligningssystem***

Lad S være et konsistent inhomogent ligningssystem med løsningsmængde L og lad $\tilde{X} \in L$ være en vilkårlig løsning til S. Der gælder at

$$L = \left\{ X = X_0 + \tilde{X} \middle| X_0 \in L_0 \right\}$$ (LA sætn. 7.3.5)

hvor L_0 betegner løsningsmængden til det tilhørende homogene ligningssystem S_0.

Koordinattransformation

Lad $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ og $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ være to baser i $\mathbf{R}^n$. En vilkårlig vektor $x \in \mathbf{R}^n$ har en entydig fremstilling af formen $x = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n$. Vi kan derfor konstruere en lineær afbildning $S : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ ved at sætte

$$Sx = S(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n) = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \ldots + \lambda_n b_n$$

Afbildningen S transformerer en vektor med et givet koefficientsæt med hensyn til basen $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ over i den vektor, der med hensyn til basen $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ har samme koefficientsæt. Specielt gælder det, at $Sa_i = b_i$, $i = 1,2,\ldots,n$

Afbildningen S kaldes for koordinattransformationsafbildningen hørende til skiftet fra basen $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ til basen $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$. S er entydigt bestemt. (LA s. 170)

Sætn.: ***Koordinattransformationsafbildnings linearitet***

Den ovennævnte koordinattransformationsafbildning er lineær og bijektiv.

(LA sætn. 7.4.1)

Omvendt gælder det også, at en hver bijektiv og lineær afbildning $S : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ er en koordinattransformationsafbildning. (LA s. 171ø)

Sætn.: ***Vektorer som linearkombination af basisvektorer***

Lad $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ og $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ være to baser i $\mathbf{R}^n$, og lad S være koordinattransformationsafbildningen bestemt ved $Sa_i = b_i$, $i = 1,2,\ldots,n$

Enhver af vektorerne b_j kan på entydig måde skrives som linearkombination af vektorerne i basen $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Der findes således koefficienter $q_{1j}, q_{2j}, \ldots, q_{nj}$ for hvilke

$$b_j = q_{1j} a_1 + q_{2j} a_2 + \cdots + q_{nj} a_n \quad j = 1,2,\ldots,n$$

Matricen $Q = (q_{ij}) \in R_n^n$ er regulær og hører til S med hensyn til begge baser $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ og $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$. (LA sætn. 7.4.2)

Matricen Q kaldes koordinattransformationsmatricen hørende til skiftet fra basen $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ til basen $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$. Koordinattransformationsmatricen hørende til skiftet fra basen $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ til basen $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ er den inverse matrix Q^{-1}. (LA s. 172)

Sætn.: ***Vektorer under forskellige baser og koordinattransformationsmatricen***

Lad $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ og $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ være baser for vektorrummet $\mathbf{R}^n$ og lad $x \in \mathbf{R}^n$ være en vilkårlig vektor, der med hensyn til baserne a og b har koordinatsøjlerne X_a og X_b. Hvis $n \times n$ matricen $Q = (q_{ij})$ er koordinattransformationsmatricen hørende til skiftet fra a til b, gælder der at

$$X_a = QX_b \qquad \text{(LA sætn. 7.4.4)}$$

Sætn.: ***Koordinattransformationsmatrix***

Vi tænker os en valgt basis $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ i $\mathbf{R}^n$. Lad $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ være en lineær afbildning, og lad $A = (\alpha_{ij}) \in R_n^n$ være den til T hørende matrix med hensyn til den valgte basis. Lad også $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ være en basis i $\mathbf{R}^n$. Matricen

$$B = Q^{-1}AQ \qquad \text{(LA sætn. 7.4.6)}$$

er den til T hørende matrix med hensyn til basen $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$, idet Q er koordinattransformationsmatricen hørende til skiftet fra $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ til $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$.

Hvis der findes en regulær matrix Q for hvilken ovenstående ligning gælder, så kaldes de to kvadratiske matricer A og B regulærækvivalente. (LA s. 175)

Sætn.: ***Ortogonal matrix og koordinattransformationsmatrix***

Lad $(\mathbf{R}^n, (\cdot|\cdot))$ være et euklidisk vektorrum udstyret med ortonormalbaser $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ og $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$. Hvis Q betegner koordinattransformationsmatricen hørende til skiftet fra $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ til $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$, gælder der at

$$Q^t = Q^{-1} \qquad \text{(LA sætn. 7.4.8)}$$

En regulær matrix Q for hvilken det ovenstående gælder kaldes en ortogonal matrix. Navnet er lidt misvisende – egentlig ville en ortonormal matrix have været mere rammende, da der kræves for at en matrix Q skal være ortogonal, at sættet bestående af matricens søjlevektorer skal være et ortonormalt sæt.

Hvis en sådan matrix Q eksisterer, og altså er ortogonal, så kaldes matricerne A og B ikke bare regulærækvivalente, men også ortogonalækvivalente.

(LA s. 176n)

Determinanter (LA kap. 8 og 9)

Vi indfører en lidt speciel notation: Lad A være en vilkårlig $m \times n$ matrix og lad X betegne en $1 \times n$ matrix. Hvis den r'te række i A erstattes med X opfattet som række, fremkommer en ny matrix, som betegnes med $I_r\,(\,A \leftarrow X\,)$. (LA s. 186)

Sætn.: ***Weierstrass' determinantsætning***

Determinantafbildningen $A \to \det A$ er den eneste n-linearform defineret på mængden af $n \times n$ matricer, som tilfredsstiller:

- $\det E = 1$
- For enhver matrix $A = (a_{ij}) \in R_n^n$ og ethvert $n > 1$ gælder der

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{k1} \cdot (-1)^{k+1} \det\big(D_{k,1}(A)\big)$$ (LA sætn. 8.2.3)

Sætn.: ***Determinant af enhedsmatricen mv.***

Lad $n \in \mathbf{N}$ og $c \in \mathbf{R}$, og vælg et $r = 1,2,\ldots,$n. Der gælder at

- $\det E_n = 1$
- $\det I_r\,(\,A \leftarrow X + Y\,) = \det I_r\,(\,A \leftarrow X\,) + \det I_r\,(\,A \leftarrow Y\,)$
- $\det\,(\,Ø_r(c)\cdot A\,) = c \cdot \det A$ (LA sætn. 9.1.1)

Sætn.: ***Diverse regneregler for determinanter***

For enhver $n \times n$ matrix A gælder der:

- $\det\,(\,\lambda A\,) = \lambda^n \cdot \det A$, $\lambda \in \mathbf{R}$
- $\det A = 0$, hvis A indeholder en nulrække (LA kor. 9.1.2)
- $\det A = 0$, hvis to af rækkerne i A er ens
- $\det\,(\,Æ_{ij}(c) \cdot A\,) = \det A$, for $i \neq j$ og $c \in \mathbf{R}$
- $\det\,(\,Å_{ij} \cdot A\,) = -\det A$, for $i \neq j$, idet $i, j = 1,2,\ldots,n$ (LA sætn. 9.1.3)

  Altså, hvis to rækker ombyttes, så skifter determinanten fortegn.

Sætn.: ***Determinanter af operationsmatricer***

For ethvert $n \in \mathbf{N}$ og $i, j = 1,2,\ldots,n$ gælder der

- det $(Æ_{ij}(c)) = 1$, for $i \neq j$ og $c \in \mathbf{R}$
- det $Ø_i(c) = c$, $c \in \mathbf{R}$
- det $Å_{ij} = -1$, $i \neq j$ (LA kor. 9.1.4)

Lad S og A være $n \times n$ matricer. Hvis S er en operationsmatrix, gælder der

- det $(SA) = \det S \cdot \det A$ (LA kor. 9.1.5)

Sætn.: ***Determinantens betydning for regulariteten af en matrix***

En $n \times n$ matrix A er regulær, hvis og kun hvis

- det $A \neq 0$ (LA teor. 9.1.6)

Sætn.: ***Flere regneregler for determinanter***

For $n \times n$ matricer A og B gælder der

- det $(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$ (LA teor. 9.1.8)
- det $A^{-1} = (\det A)^{-1}$, hvor A er regulær
- Regulærækvivalente matricer har samme determinant (LA kor. 9.1.9)
- det $A^t = \det A$ (LA sætn. 9.1.10)

Sætn.: ***Determinant af diagonal- og trekantsmatrix***

Determinanten af en trekantsmatrix er lig med produktet af diagonalelementerne, følgelig er determinanten af en diagonalmatrix også lig med produktet af diagonalelementerne:

- $\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$, hvor A er en $n \times n$ diagonal- eller trekantsmatrix.

(LA sætn. 9.1.11)

Sætn.: ***Søjleoperationer og determinant***

Lad A være en $n \times n$ matrix. Der gælder

- det $A = 0$, hvis A indeholder en nul<u>søjle</u>
- det $A = 0$, hvis to af <u>søjlerne</u> i A er ens
- Ombyttes to forskellige <u>søjler</u> i A, så skifter determinanten fortegn

- Hvis man til en søjle i A adderer en linearkombination af de øvrige søjler, så forandres determinanten ikke. (LA kor. 9.2.1)

Sætn.: ***Laplaces udviklingssætning***

Først indfører vi komplementet af en $n \times n$ matrix A:

$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det D_{i,j}(A)$, idet $i, j = 1, 2, \ldots, n$ (LA s. 206)

For en $n \times n$ matrix $A = (a_{ij})$ gælder der

- $\det A = a_{r1}A_{r1} + a_{r2}A_{r2} + \ldots + a_{rn}A_{rn}$, $r = 1, 2, \ldots, n$
- $\det A = a_{1s}A_{1s} + a_{2s}A_{2s} + \ldots + a_{ns}A_{ns}$, $s = 1, 2, \ldots, n$ (LA sætn. 9.2.2)

Det øverste kalder vi for at udvikle efter r'te række.

Det nederste kalder vi for at udvikle efter s'te søjle.

Sætn.: ***Invertering af regulære matricer***

Først indfører vi matricen $\tilde{A} = (A_{ij})$ hvis element i den i'te række og den j'te søjle er komplementet, hvor A er given $n \times n$ matrix:

$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det D_{i,j}(A)$, idet $i, j = 1, 2, \ldots, n$ (LA s. 211m)

For enhver $n \times n$ matrix A gælder der

- $A\tilde{A}^t = (\det A) \cdot E_n$ (LA sætn. 9.4.1)

hvor E_n er $n \times n$ enhedsmatricen.

Lad A være en regulær $n \times n$ matrix. Den inverse matrix er givet ved

- $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \cdot \tilde{A}^t$ (LA sætn. 9.4.2)

Sætn.: ***Cramers formler***

Lad $AX = B$ være et Cramersk ligningssystem. At et ligningssystem er Cramersk vil sige et ligningssystem bestående af n ligninger med n ubekendte, hvis dog koefficientmatricen er regulær, dvs. har determinant forskellig fra nul. (LA s. 213)

De ubekendte $x_1, x_2, \ldots, x_n$ er givet ved formlen:

- $$x_i = (\det A)^{-1} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(i-1)} & b_1 & a_{1(i+1)} & \cdots a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2(i-1)} & b_2 & a_{2(i+1)} & \cdots a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(i-1)} & b_n & a_{n(i+1)} & \cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$ (LA sætn. 9.5.1)

for $i = 1, 2, \ldots, n$

Husk dog d'herrer M. Nørgaard Olesen og Frank Hansens kommentar til Cramers formler: "*Cramers formler ... udgør en ekstraordinær uøkonomisk metode til at løse lineære ligningssystemer ... benyttes derfor næsten udelukkende i forbindelse med teoretiske overvejelser.*"

Spektralteori – (LA kap. 10)

Def.: ***Egenværdi***

Lad $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ være en lineær afbildning og lad $\lambda \in \mathbf{R}$. Hvis der findes en egentlig vektor $x \in \mathbf{R}^n$ for hvilken $Tx = \lambda x$, så siges x at være en egenvektor for T, og λ kaldes den tilhørende egenværdi. (LA def. 10.1.1)

Def.: ***Egenrum***

Til en given lineær afbildning $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ og et givet $\lambda \in \mathbf{R}$ indføres mængden

- $V_T(\lambda) = \{x \in \mathbf{R}^n \mid Tx = \lambda x\}$ (LA def. 10.1.2)

- Denne kaldes egenrummet for T hørende til skalaren λ.
- Denne er et underrum af $\mathbf{R}^n$, idet $V_T(\lambda) = N(T - \lambda I)$
- Dimensionen af $V_T(\lambda)$ kaldes egenværdimultipliciteten for λ og betegnes med $em_T(\lambda)$.
- λ er en egenværdi for T hvis og kun hvis egenværdimultipliciteten $em_T(\lambda) > 0$.
- Der gælder specielt, at $V_T(0) = N(T)$. Derfor er nul en egenværdi for T, hvis og kun hvis T ikke er injektiv.
- Mængden af egenværdier for en endomorfi T kaldes spektret for T og betegnes med $\sigma(T)$. (LA s. 222ø)

Sætn.: ***Sum af egenrum og egenværdimultipliciteter***

Lad $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ være en lineær afbildning med indbyrdes forskellige egenværdier $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$. Egenrummene $V_T(\lambda_1), V_T(\lambda_2), \ldots, V_T(\lambda_p)$ danner direkte sum, og summen af egenværdimultipliciteterne:

$$em_T(\lambda_1) + em_T(\lambda_2) + \cdots + em_T(\lambda_p) \le n$$ (LA sætn. 10.1.4)

Def.: ***Det karakteristiske polynomium***

Lad T være en endomorfi af $\mathbf{R}^n$ og lad A være den til afbildningen T hørende matrix med hensyn til en valgt basis. Polynomiet

$$p_T(t) = \det(A - tE)$$ (LA def. 10.2.1)

kaldes det karakteristiske polynomium for T.

Sætn.: ***Egenværdi og det karakteristiske polynomium***

En skalar λ er egenværdi for en lineær afbildning $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, hvis og kun hvis λ er rod i det karakteristiske polynomium p_T. (LA sætn. 10.2.2)

Da et polynomium af n'te grad højst har n reelle rødder, ser vi umiddelbart, at en endomorfi af $\mathbf{R}^n$ højst har n egenværdier. (LA s. 224n)

Def.: ***Rodmultiplicitet***

Rodmultipliciteten for en rod λ i et polynomium $p(t)$ er det naturlige tal $rm(\lambda)$ for hvilket $p(t)$ kan skrives på formen

$$p(t) = (t - \lambda)^{rm(\lambda)} \cdot Q(t)$$

hvor $Q(t)$ er et polynomium, som ikke har λ som rod. (LA s. 225)

Rodmultipliciteten angiver det antal gange λ er rod i det karakteristiske polynomium.

Sætn.: ***Egenværdimultiplicitet og rodmultiplicitet***

Lad $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ være en lineær afbildning. Der gælder

- $em_T(\lambda) \leq rm_T(\lambda)$
- $em_T(\lambda) = n - \dim R(T - \lambda I)$

for ethvert $\lambda \in \mathbf{R}$. (LA sætn. 10.2.3)

Symmetrisk afbildning og invariant underrum

Def.: Lad $(\cdot|\cdot)$ være et indre produkt i $\mathbf{R}^n$. Husk, at en lineær afbildning $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ kaldes symmetrisk hvis $(Tx \mid y) = (x \mid Ty) \quad \forall\, x, y \in \mathbf{R}^n$. (LA s. 228n)

Sætn.: Der gælder, at T er symmetrisk, hvis og kun hvis den tilhørende matrix med hensyn til en given ortonormalbasis er symmetrisk. (LA s. 229ø)

Def.: Et underrum U af $\mathbf{R}^n$ kaldes invariant under en endomorfi T af $\mathbf{R}^n$ hvis $TU \subseteq U$.

Egenrummet $V_T(\lambda)$ hørende til en egenværdi $\lambda \in \mathbf{R}$ er et simpelt eksempel på et invariant underrum. (LA s. 229ø)

Sætn.: ***Invariant underrum, symmetrisk endomorfi og ortogonalt komplement***

Lad T være en symmetrisk endomorfi af et euklidisk vektorrum $(\mathbf{R}^n, (\cdot|\cdot))$.

- Hvis U er et invariant underrum, så er også det ortogonale komplement $U^\perp$ invariant under T.

- Hvis λ og μ er forskellige egenværdier for T, så er egenrummene $V_T(\lambda)$ og $V_T(\mu)$ ortogonale.

<u>Sætn.:</u> ***Symmetrisk endomorfi og det karakteristiske polynomium***

Lad T være en symmetrisk endomorfi af et euklidisk vektorrum $(\mathbf{R}^n, (\cdot|\cdot))$.
Det karakteristiske polynomium har en reel rod. (LA sætn. 10.3.2)

<u>Sætn.:</u> ***Spektralsætningen***

Lad $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ være en symmetrisk lineær afbildning og lad $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ være de indbyrdes forskellige egenværdier for T. Der gælder:

- $em_T(\lambda_i) = rm_T(\lambda_i)$ for $i = 1, 2, \ldots, p$
- $em_T(\lambda_1) + em_T(\lambda_2) + \cdots + em_T(\lambda_p) = n$
- Egenrummene danner direkte sum og
  $V_T(\lambda_1) \oplus V_T(\lambda_2) \oplus \cdots \oplus V_T(\lambda_p) = \mathbf{R}^n$
- Der findes en ortonormalbasis for $\mathbf{R}^n$ bestående af egenvektorer for T. Med hensyn til denne basis er den tilhørende matrix af formen

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_p \end{pmatrix}$$

  Diagonalelementerne er egenværdierne for T hver medtaget så mange gange som egenværdimultipliciteten angiver. (La sætn. 10.3.3)

<u>Sætn.:</u> ***Symmetrisk matrix, diagonalmatrix og ortogonalækvivalens***

En symmetrisk matrix $A \in R_n^n$ er ortogonalækvivalent med en diagonalmatrix. Der findes altså en matrix $Q \in R_n^n$ for hvilken $Q^t = Q^{-1}$ og så matricen

$$D = Q^{-1}AQ$$

er en diagonalmatrix. De n diagonalelementer i D er rødderne i det karakteristiske polynomium

$$p_A(t) = \det(A - tE_n) \qquad , t \in \mathbf{R}$$

hver medtaget så mange gange, som rodmultipliciteten angiver. Søjlerne i ortogonalmatricen Q er koordinatsøjler for vektorerne i en ortonormalbasis af egenvektorerne for A med hensyn til den kanoniske basis. (LA kor. 10.3.4)

Def.: ***Definithedsforhold***

- En symmetrisk $n \times n$ matrix A kaldes positiv definit, hvis
  $(Ax \mid x) > 0 \quad \forall x \in \mathbf{R}^n \ , \ x \neq \vec{0}$
- Tilsvarende kaldes A negativ definit, hvis $-A$ er positiv definit.
- Matricen A kaldes positiv semidefinit, hvis
  $(Ax \mid x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbf{R}^n$
- og kaldes negativ semidefinit, hvis $-A$ er positiv semidefinit.
- Matricen A kaldes indefinit, hvis der findes vektorer $x, y \in \mathbf{R}^n$ for hvilke
  $(Ax \mid x) > 0 \quad og \quad (Ay \mid y) < 0$ (LA def. 10.3.5)

Sætn.: ***Definithedsforhold og egenværdier***

Lad A være en symmetrisk $n \times n$ matrix. Der gælder

- A er positiv definit, hvis og kun hvis samtlige egenværdier er positive
- A er positiv semidefinit, hvis og kun hvis samtlige egenværdier er ikke-negative
- A er negativ definit, hvis og kun hvis samtlige egenværdier er negative
- A er negativ semidefinit, hvis og kun hvis samtlige egenværdier er ikke-positive
- A er indefinit, hvis og kun hvis A har både positive og negative egenværdier

(LA sætn. 10.3.6)

Kvadratiske former (LA kap. 11)

Def.: ***Kvadratisk form***

Ved en kvadratisk form $K : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ defineret på det n–dimensionale vektorrum $\mathbf{R}^n$ forstås en reel funktion med en forskrift af formen

$$K(x) = K(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij} x_i x_j \qquad \text{(LA def. 11.1.1)}$$

hvor $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$. Tallene c_{ij} kaldes koefficienterne for kvadratiske form K.

Sætn.: ***Matrix og kvadratisk form***

En kvadratisk form $K : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ kan skrives på formen

$$K(x) = X^t C X$$

hvor $C = (c_{ij})$ er en $n \times n$ matrix, og

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \text{(LA sætn. 11.1.3)}$$

er koordinatsøjlen for vektoren x med hensyn til den kanoniske basis for $\mathbf{R}^n$.

Sætn.: ***Kvadratisk form og entydigt bestemt symmetrisk matrix***

Lad $K : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ være en kvadratisk form. Der findes en entydigt bestemt symmetrisk $n \times n$ matrix A for hvilken

$$K(x) = X^t A X \qquad \forall\, x \in \mathbf{R}^n$$

idet X betegner koordinatsøjlen for vektoren x. (LA sætn. 11.1.5)

Sætn.: ***Kvadratisk form, entydigt bestemt symmetrisk matrix og skalarproduktet***

Lad K være en kvadratisk form på $\mathbf{R}^n$, og lad A være den ovennævnte tilhørende entydigt bestemte symmetriske $n \times n$ matrix. Der gælder

$$K(x) = Ax \cdot x \qquad \forall\, x \in \mathbf{R}^n \qquad \text{(LA sætn. 11.1.7)}$$

Def.: ***Kvadratisk form og isotrop vektor***

Lad $K : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ være en kvadratisk form, og lad A være den til K hørende symmetriske $n \times n$ matrix. En vektor $v \in \mathbf{R}^n$ siges at være selvadjungeret eller isotrop med hensyn til K hvis $K(v) = 0$ (LA def. 11.1.8)

Def.: ***Definithedsforhold for kvadratiske former***

Lad $K : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ være en kvadratisk form. Vi siger, at K er

- positiv definit, hvis $K(x) > 0$
- negativ definit, hvis $K(x) < 0$
- positiv semidefinit, hvis $K(x) \geq 0$
- negativ semidefinit, hvis $K(x) \leq 0$

for alle vektorer $x \neq \vec{0}$. (LA def. 11.2.1)

- indefinit, hvis der findes vektorer y og z i $\mathbf{R}^n$ for hvilke $K(y) > 0$ og $K(z) < 0$.

Sætn.: ***Definithedsforhold for kvadratisk form og symmetrisk matrix***

En kvadratisk form har samme definithed som den tilhørende symmetriske matrix.

(LA sætn. 11.2.2)

Sætn.: ***Definithedsforhold for kvadratisk form og egenværdier***

Lad $K : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ være en kvadratisk form, og lad A være den til K hørende symmetriske matrix. Egenværdierne for A regnet med multiplicitet betegnes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Der gælder

- K er nulformen, hvis og kun hvis $\lambda_1 = 0, \ldots, \lambda_n = 0$
- K er positiv definit, hvis og kun hvis $\lambda_1 > 0, \ldots, \lambda_n > 0$
- K er negativ definit, hvis og kun hvis $\lambda_1 < 0, \ldots, \lambda_n < 0$
- K er positiv semidefinit, hvis og kun hvis $\lambda_1 \geq 0, \ldots, \lambda_n \geq 0$
- K er negativ semidefinit, hvis og kun hvis $\lambda_1 \leq 0, \ldots, \lambda_n \leq 0$
- K er indefinit, hvis og kun hvis A har mindst én positiv og mindst én negativ egenværdi. (LA sætn. 11.2.5)

Def.: ***Hovedunderdeterminant / ledende hovedunderdeterminant***

En hovedunderdeterminant kaldes også en principal underdeterminant, og denne fremkommer ved at vi stryger et vist antal søjler og tilhørende rækker. Dvs. at hvis man vil

stryge 3. søjle, skal også 3. række stryges. Determinanten af den nu fremkomne matrix kaldes en hovedunderdeterminant eller en principal underdeterminant.
Antallet af hovedunderdeterminanter til en $n \times n$ matrix er givet ved $2^n - 1$.

En ledende hovedunderdeterminant også kaldet en ledende principal underdeterminant til en kvadratisk matrix A fremkommer således:

$$D_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}, \; k = 1, 2, \ldots, n \qquad \text{(MA2 s. 154-155)}$$

<u>Sætn.:</u> ***Positiv definit og ledende hovedunderdeterminanter***

En symmetrisk $n \times n$ matrix A er positiv definit, hvis og kun hvis de <u>ledende</u> hovedunderdeterminanter alle er positive. (LA teor. 11.3.4)

<u>Sætn.:</u> ***Positiv semidefinit og hovedunderdeterminanter***

En symmetrisk $n \times n$ matrix A er positiv semidefinit, hvis og kun hvis samtlige hovedunderdeterminanter er ikke-negative. (LA teor. 11.3.5)

<u>Sætn.:</u> ***Negativ definit og semidefinit og (ledende) hovedunderdeterminanter***

Lad A være en symmetrisk $n \times n$ matrix. Der gælder

- Matricen A er negativ definit, hvis og kun hvis de <u>ledende</u> hovedunderdeterminanter opfylder

$$(-1)^p \cdot D_A(1\,2 \cdots p) = (-1)^p \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pp} \end{vmatrix} > 0$$

  for $p = 1, 2, \ldots, n$

- Matricen A er negative semidefinit, hvis og kun hvis samtlige hovedunderdeterminanter opfylder

$$(-1)^p \cdot D_A(i_1\, i_2 \cdots i_p) \geq 0 \qquad 1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n$$

  for $p = 1, 2, \ldots, n$ (LA kor. 11.3.6)

Hvis man fx skal afgøre om en 5×5 matrix er negativ definit tager de tilhørende ledende hovedunderdeterminanter. Så skal de ledende underdeterminanter have følgende fortegn:

1×1	2×2	3×3	4×4	5×5
$(-1)^1 = -1$, dvs. $-$	$(-1)^2 = 1$, dvs. $+$	$(-1)^3 = -1$, dvs. $-$	$(-1)^4 = 1$, dvs. $+$	$(-1)^5 = -1$, dvs. $-$

Sætn.: ***Determinanten af en symmetrisk matrix***

Determinanten af en symmetrisk matrix er lig med produktet af egenværdierne.

Oversigtsopgave til Lineær Algebra v/ Arne Frøsig Rasmussen

Vi starter med at definere en matrix A: $A=\begin{pmatrix}2&0&4\\0&6&0\\4&0&2\end{pmatrix}$

1) *Beregn determinanten af A.*

Vi Laplaceudvikler efter 2. søjle:

$$\det A=\begin{vmatrix}2&0&4\\0&6&0\\4&0&2\end{vmatrix}=6\cdot\begin{vmatrix}2&4\\4&2\end{vmatrix}=6\cdot(4-16)=\underline{\underline{-72}}$$

2) *Bestem rangen af matrix A.*

Da det $A \neq 0$ er A regulær. Ergo haves $\underline{\underline{\text{rg } A = 3}}$

3) *Er matrix A regulær? Angiv i bekræftende fald A^{-1}.*

<u>Ja</u>, A er regulær, jf. spørgsmål 2. Vi udregner A^{-1}:

$$(A|E_n)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&0&4&1&0&0\\0&6&0&0&1&0\\4&0&2&0&0&1\end{array}\right)\begin{array}{l}-2 \quad *\frac{1}{2}\\ \quad\;\; *\frac{1}{6}\\ \\ \end{array}\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&\frac{1}{2}&0&0\\0&1&0&0&\frac{1}{6}&0\\0&0&-6&-2&0&1\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \\ \frac{1}{3} \quad *-\frac{1}{6}\end{array}$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-\frac{1}{6}&0&\frac{1}{3}\\0&1&0&0&\frac{1}{6}&0\\0&0&1&\frac{1}{3}&0&-\frac{1}{6}\end{array}\right)$$

Således ses det igen, at har en invers matrix, A^{-1}, der er givet ved:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{6}&0&\frac{1}{3}\\0&\frac{1}{6}&0\\\frac{1}{3}&0&-\frac{1}{6}\end{pmatrix}$$

Vi kontrollerer, at $A \cdot A^{-1} = E_3$

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}2&0&4\\0&6&0\\4&0&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\frac{1}{6}&0&\frac{1}{3}\\0&\frac{1}{6}&0\\\frac{1}{3}&0&-\frac{1}{6}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

kontrol er OK, A^{-1} er korrekt udregnet.

4) *Bestem dimensionen af billedrummet for matrix* ***A****.*

Det vides generelt, at de lineært uafhængige søjlevektorer i *A* udspænder billedrummet for *A*. Da rg *A* = 3, jf. spørgsmål 2, fås derfor at dim *R*(*A*) = 3.

Alternativt:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 6 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} -2 & *\frac{1}{2} \\ & *\frac{1}{6} \\ & \end{matrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \frac{1}{3} & *\left(-\frac{1}{6}\right) \end{matrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Heraf ses, at rg *A* = 3, altså antallet af søjler i *F*, der indeholder et initialettal, og igen fås

dim *R*(*A*) = 3

5) *Bestem billedrummet* ***R*(*A*)**

6) *og beskriv dets natur*

Da dim *R*(*A*) = 3, så er billedrummet for *A* lig hele R^3. Følgelig er *A* surjektiv.

De til initialettallene i spørgsmål 4 hørende (*er vist* lineært uafhængige!) søjlevektorer i den oprindelige matrix *A* udspænder billedrummet *R*(*A*):

$$\underline{\underline{R(A) = span\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}}} \quad (= \mathrm{R}^3)$$

7) *Bestem en basis for billedrummet for* ***A****,* ***R*(*A*)***.*

Det lineært uafhængige søjlevektorsæt $\underline{\underline{\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right)}}$ **udgør en basis for *R*(*A*).**

8) *Bestem nulrummet,* ***N*(*A*)** *for* ***A*** *og dets dimension.*

Vi har iflg. Grassmanns dimensionssætning, at dim *N*(*A*) = *n* – rg *A* = 3 – 3 = 0.

Derfor er nulrummet kun lig nulvektoren, altså $\underline{\underline{N(A) = \{\underline{0}\}}}$

Således er *A* injektiv.

9) *Bestem – om muligt – en basis for nulrummet for* ***A****.*

Da dim $N(A) = 0$, jf. spørgsmål 8, findes der ingen basis for $N(A)$.

10) Ligger **(0,0,0)** *hhv.* **(1,2,3)** *i nulrummet for A?*

- **(0,0,0) ligger i $N(A)$, jf. spørgsmål 8 (og er i øvrigt det eneste punkt, der ligger i nulrummet $N(A)$).**
- **(1,2,3) ligger ikke i $N(A)$, jf. ovenfor.**

11) Begrund kort, at ligningen $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, *har løsning for ethvert valg af* **b**.

Da rg $A = 3 =$ rg (A_b), har $Ax = b$ altid en løsning, jf kompendiet s. 22.3.

Alternativt:

Den til A hørende lineære afbildning T er surjektiv. jf. spørgsmål 5-6, og derfor må der være mindst én løsning.

12) Er den i spørgsmål 11 omtalte løsning entydigt bestemt?

Ja, da afbildningen, som i virkeligheden er en endomorfi som nævnt i hhv. spørgsmål 6 og 8 både surjektiv og bijektiv, og er derfor også bijektiv, jf. kompendiet s. 18.1.

Men så følger det, at $\forall\, b \in \mathrm{R}^3\ \exists\, x$, så $T(x) = b$.

Alternativt:

Da det $A \neq 0$, så følger entydigheden straks.

13) Betragt ligningssystemet $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ *vilkårlig. Bestem antallet af exogene variable og angiv – om muligt – hvilke af variablene* $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \mathbf{x_3}$ *der kan vælges som exogene variable.*

Da dim $N(A)$ (= n – rg A) jo generelt angiver antallet af exogene variable, og da dim $N(A) = 0$, jf. spørgsmål 8, så kan ingen af variablene x_1, x_2, x_3 vælges som exogene variable.

14) Bestem samtlige egenværdier for matricen **A** *og deres rodmultiplicitet.*

***t* er en egenværdi for *A* <=> $p_A(t) = 0$ <=>** $\begin{vmatrix} 2-t & 0 & 4 \\ 0 & 6-t & 0 \\ 4 & 0 & 2-t \end{vmatrix} = 0$ <=>

$(2-t)\cdot(6-t)\cdot(2-t)+0+0-(4\cdot 4\cdot(6-t)+0+0)=0$ <=>

$(2-t)^2\cdot(6-t)-(16\cdot(6-t))=0$ <=> $(6-t)\left((2-t)^2-16\right)=0$ <=>

$6-t=0 \quad \vee \quad (2-t)^2-16=0$ <=>

$t=6 \quad \vee \quad (2-t)=\pm 4$ <=>

$t=6 \quad \vee \quad t=\begin{cases}-2\\ 6\end{cases}$

Dvs. $\underline{\underline{t \in \{-2, 6\} = \sigma_A \text{ med } rm_A(-2) = 1 \text{ og } rm_A(6) = 2}}$.

15) Bestem egenrummet hørende til samtlige egenværdier

<u>ad $t = -2$:</u>

Her søges x, så $Ax = -2x$. Vi løser derfor:

$$(A-(-2)E_3 \mid 0)=\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} -1 \quad *\frac{1}{4} \\ *\frac{1}{8} \\ \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ergo haves:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{array}\right\} \textbf{ sættes derfor } x_3 = t \textbf{ fås } \begin{array}{l} x_1 = -t \\ x_2 = 0 \\ x_3 = t \end{array} \quad dvs. \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ 0 \\ t \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathrm{R}$$

Heraf ses, at $\underline{\underline{V_A(-2) = span\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}}}$

<u>ad t = 6:</u>

Her søges x, så $Ax = 6x$. Vi løser derfor:

$$(A-6E_3 \mid 0)=\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} 1 \quad *-\frac{1}{4} \\ \\ \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ergo haves:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 - x_3 = 0 \\ 0 \quad = 0 \\ 0 \quad = 0 \end{array}\right\}$$ **sættes derfor $x_2 = t_1$ og $x_3 = t_2$ fås**

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_2 \\ t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = t_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, t_1, t_2 \in \mathrm{R}$$

Heraf ses, at $\underline{\underline{V_A(6) = span\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}}}$

16) Bestem samtlige egenværdiers egenværdimultiplicitet

Jf. spørgsmål 15, ses straks at $\underline{\underline{em_A(-2) = 1}}$ og $\underline{\underline{em_A(6) = 2}}$.

<u>Alternativt:</u>

Da A er symmetrisk er $em_A(\lambda) = rm_A(\lambda)$, og disse er fundet i spørgsmål 14 til at være de ovenstående, jf. i øvrigt kompendiet s. 32.2.

17) Bestem for samtlige egenværdier en basis for de tilhørende egenrum.

En basis for $V_A(-2)$ er åbenbart sættet $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

En basis for $V_A(6)$ er åbenbart sættet $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

18) Bestem dimensionen af de i spørgsmål 15 fundne underrum og undersøg:

i) *Undersøg om* **$V_A(-2) \perp V_A(6)$**

ii) *Undersøg om* **$V_A(-2) + V_A(6) = \mathrm{R}^3$**

iii) *Undersøg om* **$V_A(-2) \oplus V_A(6) = \mathrm{R}^3$**

Da $V_A(-2) = span\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ *og* $V_A(6) = span\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ **ses straks, at**

dim $V_A(-2) = 1$ og dim $V_A(6) = 2$.

Ad i):

Vi skal blot vise at alle kombinationer af basisvektorer for de to egenrum er indbyrdes ortogonale. Dette gøres blot ved at vise, at skalarprodukterne giver 0:

$$\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=0$$ **dvs. svaret er ja**

Alternativt:

Påstanden følger af, at A er symmetrisk, jf., kompendiet s. 32.2.

Ad ii):

Vi skal blot vise, at vektorsættet bestående af de tre basisvektorer fra de egenrum er lineært uafhængigt, for dermed vil de tre basisvektorer jo danne en basis for R^3, idet dim $\mathrm{R}^3 = 3$.

Og dette er tilfældet, thi:

$$\begin{vmatrix}-1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}-1&1\\1&1\end{vmatrix}=-2\neq 0$$ **Ergo er svaret ja**

Alternativt:

Påstanden følger straks af, at A er symmetrisk, jf. kompendiet s. 32.2 (Spektralsætningen).

Ad iii):

Da det under ii) er vist, at egenrummene summer til R^3, mangler vi bare at vise at

$$V_A(-2)\cap V_A(6)=\{\vec{0}\}$$

Bevis:

$x \in V_A(-2) \cap V_A(6)$ <=> $x \in V_A(-2) \wedge x \in V_A(6)$ <=>

$$\exists\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in R:\ x=\lambda_1\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\wedge x=\lambda_2\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+\lambda_3\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} <=> \lambda_1\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=\lambda_2\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+\lambda_3\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} <=>$$

$$\lambda_1\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}-\lambda_2\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}-\lambda_3\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\vec{0}$$

Da sættet $\left(\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ **er lineært uafhængigt, så har ovenstående ligning kun én løsning, nemlig** $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ **og dermed fås** $x = \vec{0}$. **Svaret er derfor** **ja.**

Alternativt:

Påstanden følger direkte af spektralsætningen, jf. ii).

*19) Gør rede for, at matricen **A** er diagonaliserbar*

Matrix A **er diagonaliserbar, jf spektralsætningen, kompendiet s. 32.2.**

*20) Bestem en ortogonal matrix **Q**, så* $Q^{-1}AQ$ *er en diagonalmatrix, og angiv **Q** og* Q^{-1}.

Betragt egenvektorbasen $\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$. **Bemærk at vektorerne i denne opgave tilfældigvis er indbyrdes ortogonale fra start af. (Var dette ikke tilfældet kan man bruge Gram-Schmidt ortonormalisering, jf. kompendiet s. 14.3) Vi skal således i denne opgave kun normere vektorerne, og får:** $\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\right)$**, så idet søjlerne i** Q **som bekendt er de ortonormaliserede egenvektorer fås** $\underline{\underline{Q = \begin{pmatrix}0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}}}$. **Derved fås ifølge spektralsætningen, at** $Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix}6 & 0 & 0\\ 0 & 6 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$. **Da** Q **er ortogonal haves, at**

$$\underline{\underline{Q^{-1} = Q^t = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}}}$$

21) Bestem **3 × 3** *matricen* $(Q^{-1}AQ)^{-1}$.

Da ($Q^{-1}AQ$) er en diagonalmatrix, jf. spørgsmål 20, så fås let

$$\left(Q^{-1}AQ\right)^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{6} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{6} & 0\\ 0 & 0 & \frac{-1}{2}\end{pmatrix}$$ **, jf. kompendiet s. 11.**

22) Bestem tallene **det ($Q^{-1}AQ$)** *og* **det ($Q^{-1}AQ$)$^{-1}$**.

Vi starter med at bestemme det ($Q^{-1}AQ$):

$$\begin{vmatrix}6 & 0 & 0\\ 0 & 6 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{vmatrix}=6\cdot 6\cdot(-2)=\underline{\underline{-72}}$$ **, jf. kompendiet s. 27**

Da ($Q^{-1}AQ$) er en kvadratisk matrix er det A^{-1} = (det A)$^{-1}$, jf. kompendiet s. 27

dvs., $\det\left(Q^{-1}AQ\right)^{-1}=\left(\det\left(Q^{-1}AQ\right)\right)^{-1}=\underline{\underline{-\tfrac{1}{72}}}$

23) Vi definerer nu en ny **3 × 3** *matrix* ***B*** *ved* $B=\begin{pmatrix}5 & 1 & 4\\ -1 & 0 & 2\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$. *Bestem matricen* ***A+A·B***.

$$A+A\cdot B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 4\\ 0 & 6 & 0\\ 4 & 0 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 0 & 4\\ 0 & 6 & 0\\ 4 & 0 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5 & 1 & 4\\ -1 & 0 & 2\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 4\\ 0 & 6 & 0\\ 4 & 0 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}18 & 14 & 12\\ -6 & 0 & 12\\ 24 & 10 & 18\end{pmatrix}=$$

$$\underline{\underline{\begin{pmatrix}20 & 14 & 16\\ -6 & 6 & 12\\ 28 & 10 & 20\end{pmatrix}}}$$

24) Betragt de to første søjlevektorer i matricen ***A+A·B***, *som vi kalder* $\boldsymbol{c}_1$ *og* $\boldsymbol{c}_2$. *Gør rede for at sættet* ($\boldsymbol{c}_1$, $\boldsymbol{c}_2$) *er lineært uafhængigt.*

Vektorerne $\begin{pmatrix}20\\ -6\\ 28\end{pmatrix}$ *og* $\begin{pmatrix}14\\ 6\\ 10\end{pmatrix}$ **er oplagt <u>ikke</u> proportionale, ergo er de lineært <u>uafhængige</u>.**

25) Gør rede for, at ***U*** = **span** {($\boldsymbol{c}_1$, $\boldsymbol{c}_2$)} *er et underrum af* $\mathrm{R}^{\mathbf{3}}$.

i) *Bestem mængden af talpar* (***a***, ***b***), *så* (**1**, ***a***, ***b***) ∈ ***U***.

$U = span\left\{\begin{pmatrix}20\\-6\\28\end{pmatrix},\begin{pmatrix}14\\6\\10\end{pmatrix}\right\}$ **er et underrum af** R^3**, jf. kompendiet s. 4**

Ad i)

$\alpha\cdot\begin{pmatrix}20\\-6\\28\end{pmatrix}+\beta\cdot\begin{pmatrix}14\\6\\10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\a\\b\end{pmatrix}$ **Derfor betragtes:** $\left(\begin{array}{cc|c}20 & 14 & 1\\-6 & 6 & a\\28 & 10 & b\end{array}\right)\ \frac{6}{20}\ \ \frac{-28}{20}\ *\frac{1}{20}\ \mapsto$

$\left(\begin{array}{cc|c}1 & \frac{7}{10} & \frac{1}{20}\\0 & \frac{51}{5} & a+\frac{3}{10}\\0 & \frac{-48}{5} & b-\frac{7}{5}\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ *\frac{5}{51}\\ *\frac{-5}{48}\end{array}\mapsto\left(\begin{array}{cc|c}1 & \frac{7}{10} & \frac{1}{20}\\0 & 1 & \frac{20a+6}{204}\\0 & 1 & -\frac{20b-28}{192}\end{array}\right)-\frac{7}{10}\ \ -1\mapsto\left(\begin{array}{cc|c}1 & 0 & \frac{-140a+60}{2040}\\0 & 1 & \frac{20a+6}{204}\\0 & 0 & -\frac{20b-28}{192}-\frac{20a+6}{204}\end{array}\right)=$

$\left(\begin{array}{cc|c}1 & 0 & \frac{15-35a}{510}\\0 & 1 & \frac{10a+3}{102}\\0 & 0 & -\left(\frac{3840a+4080b-4560}{39168}\right)\end{array}\right)$

Heraf fås (1, *a*, *b*) $\in$ ***U*** **<=>** $\dfrac{3840a+4080b-4560}{39168}=0$ **<=>**

$3840a=-4080b+4560$ <=> $a=-\frac{4080}{3840}b+\frac{4560}{3840}=-\frac{17}{16}b+\frac{19}{16}$. **Ergo fås:**

$\left\{(a,b)\middle|a=\frac{-17}{16}b+\frac{19}{16}\right\}$

26) Bestem en ortonormalbasis for V_A**(6)** *fra spørgsmål 15.*

Da basisvektorerne i V_A**(6) er "født" ortogonale behøver vi <u>ikke</u> at bruge Gram-Schmidts ortogonaliseringsmetode. Vi skal blot normere og får følgende basis:**

$$\underline{\underline{\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)}}$$

27) Bestem det ortogonale komplement til V_A**(6)** *og til* V_A**(–2)** *fra spørgsmål 15.*

<u>Ad V_A(6):</u>

$\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V_A(6)^\perp}$ <=> $x\perp\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \wedge x\perp\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ <=> $\left.\begin{matrix}0x_1+1x_2+0x_3=0\\1x_1+0x_2+1x_3=0\end{matrix}\right\}$ **Vi betragter derfor:**

$\left(\begin{array}{ccc|c}0&1&0&0\\1&0&1&0\end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&0\\0&1&0&0\end{array}\right)$**. Sættes derfor $x_3 = t$ fås**

$$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-t\\0\\t\end{pmatrix} \quad \text{så} \quad \underline{\underline{V_A(6)^\perp}}=\left\{x \mid x=t\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}, t\in R\right\}=\underline{\underline{span\left\{\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}}}$$

<u>Ad $V_A(-2)^\perp$:</u>

$\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V_A(-2)^\perp}$ <=> $x\perp\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ <=> $-x_1+x_3=0$**. Sættes derfor $x_2 = t$ og $x_3 = s$ fås**

$$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}s\\t\\s\end{pmatrix} \quad \text{så} \quad \underline{\underline{V_A(-2)^\perp}}=\left\{x \mid x=t\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, t\in R\right\}=\underline{\underline{span\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}}}$$

28) *Vis at underrummet* $\boldsymbol{U}$ **= span** $\left\{\begin{pmatrix}-3\\6\\-3\end{pmatrix}\right\} \subseteq \boldsymbol{V_A(6)}$ *(fra spørgsmål 15).*

Da $V_A(6)$ er et underrum, er det nok at vise at $\begin{pmatrix}-3\\6\\-3\end{pmatrix}\in V_A(6)$**, og dette er klart idet**

$$\begin{pmatrix}-3\\6\\-3\end{pmatrix}=6\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+(-3)\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

*29) Lad matrix **A** være den til en kvadratisk form **Q** hørende matrix. Bestem **A**'s definithedsforhold.*

Ifølge spørgsmål 14, er *A*'s egenværdier 6 og –2. Derfor er *Q* eller *A* <u>indefinit</u>, jf. kompendiet s. 35.

30) Lad A betegne Hessematricen[1] *for en funktion* $\boldsymbol{f} : \mathrm{R}^3 \to \mathrm{R}$. *Kan **f** være en konveks eller konkav funktion?*

Da Hessematricen er indefinit, er den således hverken positiv semidefinit eller negativ semidefinit og kan derfor hverken være konveks eller konkav. Jf. MA1 s. 395 og MA2 s. 170.

31) Betragt en lineær afbildning $\boldsymbol{S} : \mathrm{R}^3 \to \mathrm{R}$ *for hvilken det gælder, at*

$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{e}_1) = 2\boldsymbol{e}_1 + 4\boldsymbol{e}_3$ $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{e}_2) = 6\boldsymbol{e}_2$ $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{e}_3) = 4\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_3$ *, hvor* $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ *betegner den kanoniske basis for* R^3.

i) Begrund kort, at $\boldsymbol{e}_1$ *<u>ikke</u> er en egenvektor for* $\boldsymbol{S}$.

ii) Bestem den til $\boldsymbol{S}$ *hørende matrix* $\boldsymbol{A}$ *mht.* $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$.

iii) Begrund, at $\boldsymbol{S}$ *er surjektiv.*

<u>Ad i):</u>

Dette er klart, thi $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{e}_1) = 2\boldsymbol{e}_1 + 4\boldsymbol{e}_3 \neq \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{k} \in \mathrm{R}$. **Ergo er** $\boldsymbol{e}_1$ **<u>ikke</u> en egenvektor for** $\boldsymbol{S}$.

<u>Ad ii):</u>

Da søjlevektorerne i den tilhørende matrix A **er billederne af de kanoniske basisvektorer fås let:** $\underline{\underline{A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 6 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}}}$.

<u>Ad iii):</u>

Billedrummet for A **udspændes af de lineært uafhængige søjlevektorer i** A. **Da rg** $A = 3$, **iflg. spørgsmål 2, så haves at** $\boldsymbol{R}(A) = \mathrm{R}^3$. **Ergo <u>er</u>** $\boldsymbol{S}$ **surjektiv.**

32) Betragt en lineær afbildning $\boldsymbol{T} : \mathrm{R}^3 \to \mathrm{R}^3$ *for hvilken det gælder, at*

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

[1] Se MA1, s. 395 for en definition af Hessematricen.

i) *Begrund kort, at* $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ *er en egenvektor for* ***T***.

ii) *Bestem* ***T*(*e*₁)**, ***T*(*e*₂)** *og* ***T*(*e*₃)**, *hvor* **(*e*₁, *e*₂, *e*₃)** *betegner den kanoniske basis for* R^3.

iii) *Bestem den til* ***T*** *hørende matrix* ***A*** *mht.* **(*e*₁, *e*₂, *e*₃)**.

iv) *Begrund at* ***T*** *er injektiv.*

v) *Undersøg om* $\boldsymbol{T}^{-1}$ **:** $\mathrm{R}^3 \rightarrow \mathrm{R}^3$ **er en lineær afbildning og opskriv i bekræftende fald matricen hørende til** $\boldsymbol{T}^{-1}$ *mht.* **(*e*₁, *e*₂, *e*₃)**.

<u>Ad i):</u>

Det er klart, thi $T\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\0\\6\end{pmatrix}=6\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ **(og den tilhørende egenværdi er 6).**

<u>Ad ii) & iii):</u>

Vi har altså, at $A\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\6\\4\end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\0\\6\end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\6\\4\end{pmatrix}$**. Disse oplysninger samles til**

en matrixligning: $\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&6&8\\6&0&6\\4&6&4\end{pmatrix}$**. Transponeres denne ligning fås:**

$\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&2\end{pmatrix}A^t=\begin{pmatrix}2&6&4\\6&0&6\\8&6&4\end{pmatrix}$**. Vi betragter derfor:**

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&2&6&4\\1&0&1&6&0&6\\0&1&2&8&6&4\end{array}\right)\begin{matrix}-1\\ \\ \\ \end{matrix} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&2&6&4\\0&-1&1&4&-6&2\\0&1&2&8&6&4\end{array}\right)\begin{matrix}\\ 1\quad 1\quad *-1\\ \\ \end{matrix}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&6&0&6\\0&1&-1&-4&6&-2\\0&0&3&12&0&6\end{array}\right)\begin{matrix}\\ \\ *\tfrac{1}{3}\quad 1\quad -1\end{matrix} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&2&0&4\\0&1&0&0&6&0\\0&0&1&4&0&2\end{array}\right)=\left(E\middle|A^t\right)$$

Så $\underline{\underline{A = A^{tt} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 6 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}}}$**, hvor af vi kan aflæse:** $\underline{\underline{T(e_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}}}$, $\underline{\underline{T(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}}}$, $\underline{\underline{T(e_3) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}}}$

Ad iv):

Da dim $N(T) = n - \text{rg } A = 3 - 3 = 0$, jf. spørgsmål 2, haves at $\underline{\underline{N(T) = \{\vec{0}\}}}$**. Ergo er T injektiv.**

Jf. kompendiet s. 17.3.

Ad v):

Da $T : \mathrm{R}^3 \to \mathrm{R}^3$ er injektiv er T automatisk også bijektiv, da T er en endomorfi, jf. kompendiet s. 18.1. Men da er T^{-1} også lineær, jf. kompendiet s. 18.4. med

$\underline{\underline{A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{6} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{-1}{6} \end{pmatrix}}}$ **(jf. spørgsmål 3) som den tilhørende afbildningsmatrix,**

jf. kompendiet s. 21.3.

33) Betragt en lineær afbildning $\boldsymbol{U} : \mathrm{R}^3 \to \mathrm{R}^3$ *for hvilken det gælder, at*

$U(e_1 + e_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$, $U(e_1 + e_3) = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$, $U(e_2 + e_3) = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ *hvor* $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ *betegner den kanoniske basis for* R^3.

i) *Bestem den til* $\boldsymbol{U}$ *hørende matrix mht.* $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$.

ii) *Gør rede for, at* $\boldsymbol{U}$ *er en symmetrisk afbildning.*

iii) *Begrund kort, at egenrummet* $\boldsymbol{V_U}(\mathbf{-2})$ *er invariant under* $\boldsymbol{U}$.

Ad i):

Da $e_1 + e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_1 + e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ *og* $e_2 + 2e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ **kan man ved at sammenligne med oplysningerne i spørgsmål 32 direkte se, at *T* og *U* i virkeligheden er beskriver den** **samme** **lineære afbildning. Iflg. spørgsmål 32 iii) fås da straks:** $\underline{\underline{A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 6 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}}}$

Ad ii):

Påstanden er klart rigtig, idet den tilhørende matrix *A* fundet under i) klart er symmetrisk, jf. i øvrigt LA sætn. 10.3.1.

Ad iii):

Ses idet $V_U(-2) = span\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$**. Jf. spørgsmål 15. Så hvis** $x \in V_U(-2)$ **fås, at**

$U(x) = -2 \cdot x = -2 \cdot t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in V_U(-2)$**, hvilket jo viser, at** $U(V_U(-2)) \subseteq V_U(-2)$

Ergo er $\underline{\underline{V_U(-2)}}$ **invariant under *U*.**

Stikordsregister: