

NYTTEMAKSIMERING, UDGIFTSMINIMERING OG DUALITET – ET COBB-DOUGLAS REGNEEKSEMPEL

Denne note giver et gennemregnet eksempel på nyttemaksimeringsproblemet, udgiftsminimeringsproblemet samt PS-notens dualitetsformler ved brug af den velkendte Cobb-Douglas nyttefunktion. Noten viser bl.a., hvorledes man ved at udnytte dualitetsbegrebet kan beregne Hicks-efterspørgslen ud fra nyttemaksimeringsproblemet og Walras-efterspørgslen ud fra udgiftsminimeringsproblemet.

FRA WALRAS- TIL HICKS-EFTERSPØRGSEL:

Nyttemaksimering – Walras-efterspørgsel

Vi betragter indledningsvis det sædvanlige nyttemaksimeringsproblem:

$$(UMP) \max_{x_1, x_2} x_1^a x_2^{1-a} \quad \text{st. } p_1 x_1 + p_2 x_2 = m, \quad x_1, x_2 \geq 0 \quad (0 < a < 1)$$

”=” i budgetbetingelsen følger af monotonicitet.

Givet konveksitet vil en løsning via Lagrange-optimering give nytte-maksimum. Vi definerer derfor:

$$L(x_1, x_2, \lambda) = x_1^a x_2^{1-a} - \lambda(p_1 x_1 + p_2 x_2 - m)$$

Nu fås følgende førsteordensbetingelser:

$$(FOC 1) \quad \frac{\partial L}{\partial x_1} = a \left(\frac{x_2}{x_1} \right)^{1-a} - \lambda p_1 = 0$$

$$(FOC 2) \quad \frac{\partial L}{\partial x_2} = (1-a) \left(\frac{x_1}{x_2} \right)^a - \lambda p_2 = 0$$

$$(FOC 3) \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = -p_1 x_1 + p_2 x_2 + m = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p_1 x_1 + p_2 x_2 = m$$

Divideres (FOC 2) op i (FOC 1) fås den velkendte tangeringsbetingelse:

$$\frac{a}{1-a} \frac{x_2}{x_1} = \frac{p_1}{p_2} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = \frac{a}{1-a} \frac{p_2}{p_1} x_2$$

Indsættes dette udtryk for x_1 i (FOC 3) fås:

$$p_1 \frac{a}{1-a} \frac{p_2}{p_1} x_2 + p_2 x_2 = \left(\frac{a}{1-a} + 1 \right) p_2 x_2 = \frac{1}{1-a} p_2 x_2 = m \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = (1-a) \frac{m}{p_2}$$

Dette resultat kan nu indsættes i udtrykket for x_1 :

$$x_1 = \frac{a}{1-a} \frac{p_2}{p_1} (1-a) \frac{m}{p_2} = a \frac{m}{p_1}$$

Idet både løsningen for x_1 og x_2 er ikke-negative, behøver vi ikke bestemme randløsninger. Den fulde løsning til nyttemaksimeringsproblemet er derfor:

$$x(p, m) = \begin{pmatrix} a \frac{m}{p_1} \\ (1-a) \frac{m}{p_2} \end{pmatrix}$$

Den indirekte nyttefunktion

Den indirekte nyttefunktion kan nu findes således:

$$v(p, m) = u(x(p, m)) = \left(a \frac{m}{p_1} \right)^a \left((1-a) \frac{m}{p_2} \right)^{1-a} = \left(\frac{a}{p_1} \right)^a \left(\frac{1-a}{p_2} \right)^{1-a} m$$

Udgiftsfunktionen

Udgiftsfunktionen kan bestemmes ved at udnytte en af dualitetsformlerne fra PS-noten samt det netop fundne udtryk for den indirekte nyttefunktion:

$$\bar{u} = v(p, e(p, \bar{u})) = \left(\frac{a}{p_1} \right)^a \left(\frac{1-a}{p_2} \right)^{1-a} e(p, \bar{u}) \Leftrightarrow e(p, \bar{u}) = \left(\frac{p_1}{a} \right)^a \left(\frac{p_2}{1-a} \right)^{1-a} \bar{u}$$

Hicks-efterspørgsel

Efter at have fundet udgiftsfunktionen kan vi finde Hicks-efterspørgslen. Det kan gøres på to måder.

- Metode 1 (*Sheppard's Lemma*):

$$h_1(p, \bar{u}) = \frac{\partial e(p, \bar{u})}{\partial p_1} = \frac{a}{p_1} \left(\frac{p_1}{a} \right)^a \left(\frac{p_2}{1-a} \right)^{1-a} \bar{u} = \left(\frac{a}{1-a} \frac{p_2}{p_1} \right)^{1-a} \bar{u}$$

$$h_2(p, \bar{u}) = \frac{\partial e(p, \bar{u})}{\partial p_2} = \frac{1-a}{p_2} \left(\frac{p_1}{a} \right)^a \left(\frac{p_2}{1-a} \right)^{1-a} \bar{u} = \left(\frac{1-a}{a} \frac{p_1}{p_2} \right)^a \bar{u}$$

- Metode 2 (*Dualitet*):

$$h_1(p, \bar{u}) = x_1(p, e(p, \bar{u})) = a \frac{\left(\frac{p_1}{a} \right)^a \left(\frac{p_2}{1-a} \right)^{1-a} \bar{u}}{p_1} = \left(\frac{a}{1-a} \frac{p_2}{p_1} \right)^{1-a} \bar{u}$$

$$h_2(p, \bar{u}) = x_2(p, e(p, \bar{u})) = (1-a) \frac{\left(\frac{p_1}{a} \right)^a \left(\frac{p_2}{1-a} \right)^{1-a} \bar{u}}{p_2} = \left(\frac{1-a}{a} \frac{p_1}{p_2} \right)^a \bar{u}$$

Givet $\bar{u} \geq 0$ behøver vi ikke bestemme randløsninger. Den fulde løsning er derfor:

$$h(p, \bar{u}) = \begin{pmatrix} \left(\frac{a p_2}{1-a p_1} \right)^{1-a} \bar{u} \\ \left(\frac{1-a p_1}{a p_2} \right)^a \bar{u} \end{pmatrix}$$

Fra Hicks- til Walras-efterspørgsel:

Udgiftsminimering – Hicks-efterspørgsel

Vi betragter indledningsvis det sædvanlige udgiftsminimeringsproblem:

$$(EMP) \quad \min_{x_1, x_2} p_1 x_1 + p_2 x_2 \quad \text{st. } x_1^a x_2^{1-a} = \bar{u}, \quad x_1, x_2 \geq 0 \quad (0 < a < 1, \quad \bar{u} \geq 0)$$

”=” i bibetingelsen følger af monotonocitet.

Givet konveksitet vil en løsning via Lagrange-optimering give udgifts-minimum. Vi definerer derfor:

$$L(x_1, x_2, \lambda) = p_1 x_1 + p_2 x_2 - \lambda(x_1^a x_2^{1-a} - \bar{u})$$

Nu fås følgende førsteordensbetingelser:

$$(FOC 1) \quad \frac{\partial L}{\partial x_1} = p_1 - \lambda a \left(\frac{x_2}{x_1} \right)^{1-a} = 0$$

$$(FOC 2) \quad \frac{\partial L}{\partial x_2} = p_2 - \lambda(1-a) \left(\frac{x_1}{x_2} \right)^a = 0$$

$$(FOC 3) \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = -x_1^a x_2^{1-a} + \bar{u} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1^a x_2^{1-a} = \bar{u}$$

Divideres (FOC 2) op i (FOC 1) fås den velkendte tangeringsbetingelse:

$$\frac{a}{1-a} \frac{x_2}{x_1} = \frac{p_1}{p_2} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = \frac{a}{1-a} \frac{p_2}{p_1} x_2$$

Indsættes dette udtryk for x_1 i (FOC 3) fås:

$$\left(\frac{a}{1-a} \frac{p_2}{p_1} x_2 \right)^a x_2^{1-a} = \left(\frac{a}{1-a} \frac{p_2}{p_1} \right)^a x_2 = \bar{u} \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = \left(\frac{1-a}{a} \frac{p_1}{p_2} \right)^a \bar{u}$$

Dette resultat kan nu indsættes i udtrykket for x_1 :

$$x_1 = \frac{a}{1-a} \frac{p_2}{p_1} \left(\frac{1-a}{a} \frac{p_1}{p_2} \right)^a \bar{u} = \left(\frac{a}{1-a} \frac{p_2}{p_1} \right)^{1-a} \bar{u}$$

Idet både løsningen for x_1 og x_2 er ikke-negative, behøver vi ikke bestemme randløsninger. Den fulde løsning til nyttemaksimeringsproblemet er derfor:

$$h(p, \bar{u}) = \begin{pmatrix} \left(\frac{a}{1-a} \frac{p_2}{p_1} \right)^{1-a} \bar{u} \\ \left(\frac{1-a}{a} \frac{p_1}{p_2} \right)^a \bar{u} \end{pmatrix}$$

Udgiftsfunktionen

Udgiftsfunktionen kan nu findes således:

$$\begin{aligned}e(p, \bar{u}) &= p_1 h_1(p, \bar{u}) + p_2 h_2(p, \bar{u}) = p_1 \left(\frac{a}{1-a} \frac{p_2}{p_1} \right)^{1-a} \bar{u} + p_2 \left(\frac{1-a}{a} \frac{p_1}{p_2} \right)^a \bar{u} = \\ & \left(\left(\frac{a}{1-a} \right)^{1-a} + \left(\frac{1-a}{a} \right)^a \right) p_1^a p_2^{1-a} \bar{u} = \left(\frac{a}{1-a} + 1 \right) \left(\frac{1-a}{a} \right)^a p_1^a p_2^{1-a} \bar{u} = \\ & \frac{1}{1-a} \left(\frac{1-a}{a} \right)^a p_1^a p_2^{1-a} \bar{u} = \left(\frac{p_1}{a} \right)^a \left(\frac{p_2}{1-a} \right)^{1-a} \bar{u}\end{aligned}$$

Den indirekte nyttefunktion

Den indirekte nyttefunktion kan bestemmes ved at udnytte en af dualitetsformlerne fra PS-noten samt det netop fundne udtryk for udgiftsfunktionen:

$$m = e(p, v(p, m)) = \left(\frac{p_1}{a} \right)^a \left(\frac{p_2}{1-a} \right)^{1-a} v(p, m) \Leftrightarrow v(p, m) = \left(\frac{a}{p_1} \right)^a \left(\frac{1-a}{p_2} \right)^{1-a} m$$

Walras-efterspørgsel

Efter at have fundet den indirekte nyttefunktion kan vi finde Walras-efterspørgslen. Det kan gøres på to måder.

- Metode 1 (Roy's identitet):

$$\begin{aligned}x_1(p, m) &= - \frac{\partial v(p, m) / \partial p_1}{\partial v(p, m) / \partial m} = - \frac{- \frac{a}{p_1} \left(\frac{a}{p_1} \right)^a \left(\frac{1-a}{p_2} \right)^{1-a} m}{\left(\frac{a}{p_1} \right)^a \left(\frac{1-a}{p_2} \right)^{1-a}} = a \frac{m}{p_1} \\ x_2(p, m) &= - \frac{\partial v(p, m) / \partial p_2}{\partial v(p, m) / \partial m} = - \frac{- \frac{1-a}{p_2} \left(\frac{a}{p_1} \right)^a \left(\frac{1-a}{p_2} \right)^{1-a} m}{\left(\frac{a}{p_1} \right)^a \left(\frac{1-a}{p_2} \right)^{1-a}} = (1-a) \frac{m}{p_2}\end{aligned}$$

- Metode 2 (Dualitet):

$$\begin{aligned}x_1(p, m) &= h_1(p, v(p, m)) = \left(\frac{a}{1-a} \frac{p_2}{p_1} \right)^{1-a} \left(\frac{a}{p_1} \right)^a \left(\frac{1-a}{p_2} \right)^{1-a} m = a \frac{m}{p_1} \\ x_2(p, m) &= h_2(p, v(p, m)) = \left(\frac{1-a}{a} \frac{p_2}{p_1} \right)^a \left(\frac{a}{p_1} \right)^a \left(\frac{1-a}{p_2} \right)^{1-a} m = (1-a) \frac{m}{p_2}\end{aligned}$$

Igen er det ikke nødvendigt at bestemme randløsninger. Den fulde løsning er derfor:

$$x(p, m) = \begin{pmatrix} a \frac{m}{p_1} \\ (1-a) \frac{m}{p_2} \end{pmatrix}$$

Frederik Silbye – Mikro 2, Markeder og Velfærd – 18.09.2004