NYTTEMAKSIMERING, UDGIFTSMINIMERING OG DUALITET – ET COBB-DOUGLAS REGNEEKSEMPEL

Denne note giver et gennemregnet eksempel på nyttemaksimeringsproblemet, udgiftsminimeringsproblemet samt PS-notens dualitetsformler ved brug af den velkendte Cobb-Douglas nyttefunktion. Noten viser bl.a., hvorledes man ved at udnytte dualitetsbegrebet kan beregne Hicks-efterspørgslen ud fra nyttemaksimeringsproblemet og Walras-efterspørgslen ud fra udgiftsminimeringsproblemet.

FRA WALRAS- TIL HICKS-EFTERSPØRGSEL:

Nyttemaksimering – Walras-efterspørgsel

Vi betragter indledningsvis det sædvanlige nyttemaksimeringsproblem:

(UMP) $\max_{x_1,x_2} x_1^a x_2^{1-a}$ st. $p_1x_1 + p_2x_2 = m$, $x_1, x_2 \geq 0$ $(0 < a < 1)$

"=" i budgetbetingelsen følger af monotonicitet.

Givet konveksitet vil en løsning via Lagrange-optimering give nytte-maksimum. Vi definerer derfor:

$$L(x_1, x_2, \lambda) = x_1^a x_2^{1-a} - \lambda(p_1x_1 + p_2x_2 - m)$$

Nu fås følgende førsteordensbetingelser:

(FOC 1) $\dfrac{\partial L}{\partial x_1} = a\left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)^{1-a} - \lambda p_1 = 0$

(FOC 2) $\dfrac{\partial L}{\partial x_2} = (1-a)\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right)^{a} - \lambda p_2 = 0$

(FOC 3) $\dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = -p_1x_1 + p_2x_2 + m = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p_1x_1 + p_2x_2 = m$

Divideres (FOC 2) op i (FOC 1) fås den velkendte tangeringsbetingelse:

$$\frac{a}{1-a}\frac{x_2}{x_1} = \frac{p_1}{p_2} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = \frac{a}{1-a}\frac{p_2}{p_1}x_2$$

Indsættes dette udtryk for x_1 i (FOC 3) fås:

$$p_1\frac{a}{1-a}\frac{p_2}{p_1}x_2 + p_2x_2 = \left(\frac{a}{1-a} + 1\right)p_2x_2 = \frac{1}{1-a}p_2x_2 = m \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = (1-a)\frac{m}{p_2}$$

Dette resultat kan nu indsættes i udtrykket for x_1:

$$x_1 = \frac{a}{1-a}\frac{p_2}{p_1}(1-a)\frac{m}{p_2} = a\frac{m}{p_1}$$

Idet både løsningen for x_1 og x_2 er ikke-negative, behøver vi ikke bestemme randløsninger. Den fulde løsning til nyttemaksimeringsproblemet er derfor:

$$x(p,m)=\begin{pmatrix} a\dfrac{m}{p_1} \\ (1-a)\dfrac{m}{p_2}\end{pmatrix}$$

Den indirekte nyttefunktion

Den indirekte nyttefunktion kan nu findes således:

$$v(p,m)=u(x(p.m))=\left(a\frac{m}{p_1}\right)^a\left((1-a)\frac{m}{p_2}\right)^{1-a}=\left(\frac{a}{p_1}\right)^a\left(\frac{1-a}{p_2}\right)^{1-a}m$$

Udgiftsfunktionen

Udgiftsfunktionen kan bestemmes ved at udnytte en af dualitetsformlerne fra PS-noten samt det netop fundne udtryk for den indirekte nyttefunktion:

$$\bar{u}=v(p,e(p,\bar{u}))=\left(\frac{a}{p_1}\right)^a\left(\frac{1-a}{p_2}\right)^{1-a}e(p,\bar{u}) \quad\Leftrightarrow\quad e(p,\bar{u})=\left(\frac{p_1}{a}\right)^a\left(\frac{p_2}{1-a}\right)^{1-a}\bar{u}$$

Hicks-efterspørgsel

Efter at have fundet udgiftsfunktionen kan vi finde Hicks-efterspørgslen. Det kan gøres på to måder.

- Metode 1 (*Sheppard's Lemma*):

$$h_1(p,\bar{u})=\frac{\partial e(p,\bar{u})}{\partial p_1}=\frac{a}{p_1}\left(\frac{p_1}{a}\right)^a\left(\frac{p_2}{1-a}\right)^{1-a}\bar{u}=\left(\frac{a}{1-a}\frac{p_2}{p_1}\right)^{1-a}\bar{u}$$

$$h_2(p,\bar{u})=\frac{\partial e(p,\bar{u})}{\partial p_2}=\frac{1-a}{p_2}\left(\frac{p_1}{a}\right)^a\left(\frac{p_2}{1-a}\right)^{1-a}\bar{u}=\left(\frac{1-a}{a}\frac{p_1}{p_2}\right)^a\bar{u}$$

- Metode 2 (*Dualitet*):

$$h_1(p,\bar{u})=x_1(p,e(p,\bar{u}))=a\frac{\left(\frac{p_1}{a}\right)^a\left(\frac{p_2}{1-a}\right)^{1-a}\bar{u}}{p_1}=\left(\frac{a}{1-a}\frac{p_2}{p_1}\right)^{1-a}\bar{u}$$

$$h_2(p,\bar{u})=x_2(p,e(p,\bar{u}))=(1-a)\frac{\left(\frac{p_1}{a}\right)^a\left(\frac{p_2}{1-a}\right)^{1-a}\bar{u}}{p_2}=\left(\frac{1-a}{a}\frac{p_1}{p_2}\right)^a\bar{u}$$

Givet $\overline{u} \geq 0$ behøver vi ikke bestemme randløsninger. Den fulde løsning er derfor:

$$h(p,\overline{u}) = \begin{pmatrix} \left(\dfrac{a}{1-a}\dfrac{p_2}{p_1}\right)^{1-a}\overline{u} \\ \left(\dfrac{1-a}{a}\dfrac{p_1}{p_2}\right)^{a}\overline{u} \end{pmatrix}$$

Fra Hicks- til Walras-efterspørgsel:

Udgiftsminimering – Hicks-efterspørgsel

Vi betragter indledningsvis det sædvanlige udgiftsminimeringsproblem:

(EMP) $\min_{x_1,x_2} \; p_1 x_1 + p_2 x_2 \quad$ st. $x_1^a x_2^{1-a} = \bar{u} \;,\; x_1, x_2 \geq 0 \quad (0 < a < 1 \;,\; \bar{u} \geq 0)$

"=" i bibetingelsen følger af monotonocitet.

Givet konveksitet vil en løsning via Lagrange-optimering give udgifts-minimum. Vi definerer derfor:

$$L(x_1, x_2, \lambda) = p_1 x_1 + p_2 x_2 - \lambda(x_1^a x_2^{1-a} - \bar{u})$$

Nu fås følgende førsteordensbetingelser:

(FOC 1) $\dfrac{\partial L}{\partial x_1} = p_1 - \lambda a \left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)^{1-a} = 0$

(FOC 2) $\dfrac{\partial L}{\partial x_2} = p_2 - \lambda (1-a) \left(\dfrac{x_1}{x_2}\right)^{a} = 0$

(FOC 3) $\dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = -x_1^a x_2^{1-a} + \bar{u} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1^a x_2^{1-a} = \bar{u}$

Divideres (FOC 2) op i (FOC 1) fås den velkendte tangeringsbetingelse:

$$\frac{a}{1-a}\frac{x_2}{x_1} = \frac{p_1}{p_2} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = \frac{a}{1-a}\frac{p_2}{p_1} x_2$$

Indsættes dette udtryk for x_1 i (FOC 3) fås:

$$\left(\frac{a}{1-a}\frac{p_2}{p_1} x_2\right)^a x_2^{1-a} = \left(\frac{a}{1-a}\frac{p_2}{p_1}\right)^a x_2 = \bar{u} \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = \left(\frac{1-a}{a}\frac{p_1}{p_2}\right)^a \bar{u}$$

Dette resultat kan nu indsættes i udtrykket for x_1:

$$x_1 = \frac{a}{1-a}\frac{p_2}{p_1}\left(\frac{1-a}{a}\frac{p_1}{p_2}\right)^a \bar{u} = \left(\frac{a}{1-a}\frac{p_2}{p_1}\right)^{1-a} \bar{u}$$

Idet både løsningen for x_1 og x_2 er ikke-negative, behøver vi ikke bestemme randløsninger. Den fulde løsning til nyttemaksimeringsproblemet er derfor:

$$h(p, \bar{u}) = \begin{pmatrix} \left(\dfrac{a}{1-a}\dfrac{p_2}{p_1}\right)^{1-a} \bar{u} \\ \left(\dfrac{1-a}{a}\dfrac{p_1}{p_2}\right)^{a} \bar{u} \end{pmatrix}$$

Udgiftsfunktionen

Udgiftsfunktionen kan nu findes således:

$$e(p,\bar{u}) = p_1 h_1(p,\bar{u}) + p_2 h_2(p,\bar{u}) = p_1\left(\frac{a}{1-a}\frac{p_2}{p_1}\right)^{1-a}\bar{u} + p_2\left(\frac{1-a}{a}\frac{p_1}{p_2}\right)^{a}\bar{u} =$$

$$\left(\left(\frac{a}{1-a}\right)^{1-a} + \left(\frac{1-a}{a}\right)^{a}\right)p_1^a p_2^{1-a}\bar{u} = \left(\frac{a}{1-a}+1\right)\left(\frac{1-a}{a}\right)^{a} p_1^a p_2^{1-a}\bar{u} =$$

$$\frac{1}{1-a}\left(\frac{1-a}{a}\right)^{a} p_1^a p_2^{1-a}\bar{u} = \left(\frac{p_1}{a}\right)^{a}\left(\frac{p_2}{1-a}\right)^{1-a}\bar{u}$$

Den indirekte nyttefunktion

Den indirekte nyttefunktion kan bestemmes ved at udnytte en af dualitetsformlerne fra PS-noten samt det netop fundne udtryk for udgiftsfunktionen:

$$m = e(p,v(p,m)) = \left(\frac{p_1}{a}\right)^{a}\left(\frac{p_2}{1-a}\right)^{1-a} v(p,m) \quad \Leftrightarrow \quad v(p,m) = \left(\frac{a}{p_1}\right)^{a}\left(\frac{1-a}{p_2}\right)^{1-a} m$$

Walras-efterspørgsel

Efter at have fundet den indirekte nyttefunktion kan vi finde Walras-efterspørgslen. Det kan gøres på to måder.

- Metode 1 (*Roy's identitet*):

$$x_1(p,m) = -\frac{\partial v(p,m)/\partial p_1}{\partial v(p,m)/\partial m} = -\frac{-\frac{a}{p_1}\left(\frac{a}{p_1}\right)^{a}\left(\frac{1-a}{p_2}\right)^{1-a} m}{\left(\frac{a}{p_1}\right)^{a}\left(\frac{1-a}{p_2}\right)^{1-a}} = a\frac{m}{p_1}$$

$$x_2(p,m) = -\frac{\partial v(p,m)/\partial p_2}{\partial v(p,m)/\partial m} = -\frac{-\frac{1-a}{p_2}\left(\frac{a}{p_1}\right)^{a}\left(\frac{1-a}{p_2}\right)^{1-a} m}{\left(\frac{a}{p_1}\right)^{a}\left(\frac{1-a}{p_2}\right)^{1-a}} = (1-a)\frac{m}{p_2}$$

- Metode 2 (*Dualitet*):

$$x_1(p,m) = h_1(p,v(p,m)) = \left(\frac{a}{1-a}\frac{p_2}{p_1}\right)^{1-a}\left(\frac{a}{p_1}\right)^{a}\left(\frac{1-a}{p_2}\right)^{1-a} m = a\frac{m}{p_1}$$

$$x_2(p,m) = h_2(p,v(p,m)) = \left(\frac{1-a}{a}\frac{p_2}{p_1}\right)^{a}\left(\frac{a}{p_1}\right)^{a}\left(\frac{1-a}{p_2}\right)^{1-a} m = (1-a)\frac{m}{p_2}$$

Igen er det ikke nødvendigt at bestemme randløsninger. Den fulde løsning er derfor:

$$x(p,m) = \begin{pmatrix} a\dfrac{m}{p_1} \\ (1-a)\dfrac{m}{p_2} \end{pmatrix}$$