GIBBONS KAP. 2

2.3 Gentagne spil.

2.3.A To-runde gentagne spil.

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & & 2 & \\
 & & L_2 & R_2 \\
1 & L_1 & 1,1 & 5,0 \\
 & R_1 & 0,5 & 4,4
\end{array}
$$

Dette er et fangens dilemma.

Antag nu at vi gentager spillet, så spillerne ialt spiller det to gange (med den samme modspiller).

Vi lader payoff fra dette spil være lig summen af payoffs fra de to trin.

Spillet opfylder at der givet et udfald i 1. runde er en entydig ligevægt i 2. runde.

Faktisk afhænger ligevægten i 2. runde overhovedet ikke af udfaldet i 1. runde: den entydige Nash-ligevægt i 2. runde er altid (L_1, L_2), uanset udfaldet i 1. runde.

Vi finder derfor udfaldet i 1. runde ved at analysere spillet i 1. runde, vidende at der i 2. runde vil blive spillet (L_1, L_2) med resulterende payoffs (1,1).

Men så er det klart, at ligevægten i 1. runde også må blive (L_1, L_2).

Det entydige underspilsperfekte udfald i to-runde fangens dilemma er derfor (L_1, L_2) i 1. runde efterfulgt af (L_1, L_2) i 2. runde.

Vi kan altså ikke ved at gentage spillet én gang opnå samarbejde i fangens dilemma.

Afstikker til et lidt mere generelt resultat, der gælder spil med mere end to runder:

- Tillad ethvert endeligt antal runder, T.

- Lad $G = \{A_1, ..., A_n; u_1, ..., u_n\}$ være et statisk spil med fuldstændig information. G er simultant og kaldes grundspillet ("stage game") for det gentagne spil.

Definition

Givet et grundspil G, lad $G(T)$ være det endeligt gentagne spil, i hvilket G spilles T gange, og udfald af alle foregående spil observeres, før det næste spil begynder. Payoffs for $G(T)$ er summen af payoffs for de T grundspil.

Sætning:

Hvis grundspillet G har en entydig Nash-ligevægt, vil det gentagne spil $G(T)$, for ethvert endeligt T, have et entydigt underspilsperfekt udfald: Nash-ligevægten i G spilles i hver runde.

Variationer af sætning:

1. Lad grundspillet G være et dynamisk spil med fuldstændig og perfekt information. Lad G have et entydigt baglæns-induktions udfald. Da har $G(T)$ et entydigt underspilsperfekt udfald: Baglæns-induktions udfaldet af G spilles i hver runde.

2. Lad G være et to-runde spil med fuldstændig information. Hvis G har et entydigt underspilsperfekt udfald, har $G(T)$ også et entydigt underspilsperfekt udfald: Det underspilsperfekte udfald af G spilles i hver runde.

Vend nu tilbage til to-runde spil:

$$
\begin{array}{cc}
 & 2 \\
1 & \begin{array}{cccc}
 & L_2 & M_2 & R_2 \\
L_1 & 1,1 & 5,0 & 0,0 \\
M_1 & 0,5 & 4,4 & 0,0 \\
R_1 & 0,0 & 0,0 & 3,3
\end{array}
\end{array}
$$

Strategierne L_i og M_i giver os det fangens dilemma, vi så på tidligere.

De ekstra strategier R_1 og R_2 giver os imidlertid en ekstra Nash-ligevægt, så vi nu har to:

$$(L_1, L_2) \text{ og } (R_1, R_2)$$

Antag nu at dette grundspil spilles to gange, og at udfaldet i 1. runde observeres inden 2. runde påbegyndes.

Vi vil nu vise, at der findes et underspilsperfekt udfald af dette to-runde gentagne spil, hvor der "samarbejdes" - d.v.s. spilles (M_1, M_2) - i første runde.

- Det er klart, at der i 2. runde må spilles enten (L_1, L_2) eller (R_1, R_2).

- Lad spillerne tro i første runde, at hvis de spiller (M_1, M_2) i første runde, vil der blive spillet (R_1, R_2) i anden runde.

- Hvis der spilles <u>andet</u> end (M_1, M_2) i 1. runde, vil der blive spillet (L_1, L_2) i 2. runde.

Læg derfor (3,3) til (4,4) og (1,1) til alle andre celler for at få payoffs fra 1. runde spillet:

$$
\begin{array}{cc|ccc}
 & & & 2 & \\
 & & L_2 & M_2 & R_2 \\
 & L_1 & 2,2 & 6,1 & 1,1 \\
1 & M_1 & 1,6 & 7,7 & 1,1 \\
 & R_1 & 1,1 & 1,1 & 4,4
\end{array}
$$

Tre ligevægte i rene strategier:

$$(L_1, L_2), (M_1, M_2), (R_1, R_2)$$

Hvad svarer disse til i 2. runde spillet?

$$
\begin{array}{lll}
(L_1, L_2): & ((L_1, L_2), & (L_1, L_2)) \\
(M_1, M_2): & ((M_1, M_2), & (R_1, R_2)) \\
(R_1, R_2): & ((R_1, R_2), & (L_1, L_2)) \\
 & \quad\uparrow & \quad\uparrow \\
 & \text{1. runde} & \text{2. runde}
\end{array}
$$

Den midterste af disse ligevægte er speciel, fordi der i 1. runde spilles noget, der <u>ikke</u> er en Nash-ligevægt i grundspillet.

- Spillerne opnår samarbejde i 1. runde ved troværdigt at love at spille (R_1, R_2) i 2. runde, hvis der samarbejdes i 1. runde.

Det er et generelt træk i gentagne spil, at hvis G gen-tages T gange, og der er flere Nash-ligevægte i G, kan der være underspilsperfekte udfald i $G(T)$, i hvilke udfald i periode $t < T$ ikke er Nash-ligevægte i G.

Den overordnede pointe er altså:

- Troværdige trusler eller løfter om fremtidig adfærd kan påvirke adfærden i dag.

Indtil nu har vi argumenteret for, at vi med "troværdig" bør forstå "underspilsperfekt".

Det er imidlertid ikke helt åbenlyst, at alle underspilsperfekte udfald er lige troværdige.

I argumentationen for at spillerne kan samarbejde i 1. runde indgår, at de troværdigt lover at spille (R_1, R_2) i 2. runde, hvis de begge samarbejder i første runde.

Det er også rigtigt nok, men vi "glemte" den anden side af argumentationen: Spillerne truer hinanden med den dårlige Nash-ligevægt (L_1, L_2) i 2. runde, hvis de ikke samarbejder i 1. runde.

- Det er denne anden del af argumentationen, der kan rejses indvendinger mod.

Lad os forestille os følgende situation:

- Spiller 1 afviger fra det "aftalte" 1. runde udfald (M_1, M_2) ved at spille L_1 istedet, så payoffs bliver (5,0)

- Før starten på 2. runde, hvor spillerne så skal spille den dårlige NL (L_1, L_2), siger spiller 1 nu til spiller 2:

  - "OK, jeg ved godt, at jeg var et dumt svin i per. 1, og at du nu vil straffe mig. Men ved at straffe mig og spille (L_1, L_2) straffer du jo også dig selv. Lad os nu bare glemme, hvad der skete i per. 1 og nu i per. 2 spille (R_1, R_2), som er den bedste Nash-ligevægt for os begge to."

- Man siger, at der i dette spil er mulighed for at "genforhandle" truslen om at spille (L_1, L_2).

Hvis der er mulighed for at genforhandle - eller at spillerne kan regne ud, at det kunne betale sig at genforhandle, hvis de kunne kommunikere - er det ikke længere indlysende, at der er mulighed for samarbejde om noget, der ikke er en NL i grundspillet.

Man siger, at ligevægten $((M_1, M_2), (R_1, R_2))$ ikke er "genforhandlings-sikker" (renegotiation-proof). (Farrell & Maskin: Games and Economic Behavior, 1989).

Gibbons udvider nu vores lille spil endnu en gang for at vise, at man kan sikre, at $((M_1, M_2), (R_1, R_2))$ er genforhandlings-sikker, hvis der proppes et par ekstra strategier på:

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 2 & & \\
 & & L_2 & M_2 & R_2 & P_2 & Q_2 \\
 & L_1 & 1,1 & 5,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\
 & M_1 & 0,5 & 4,4 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\
1 & R_1 & 0,0 & 0,0 & 3,3 & 0,0 & 0,0 \\
 & P_1 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 4,\frac{1}{2} & 0,0 \\
 & Q_1 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & \frac{1}{2},4
\end{array}
$$

Vi har nu givet hver spiller to nye strategier: P_i og Q_i

Der er nu fire Nash-ligevægte i grundspillet:

$$(L_1, L_2), (R_1, R_2), (P_1, P_2), (Q_1, Q_2)$$

(L_1, L_2) domineres af (R_1, R_2), så der er tre NL på Pareto-fronten.

Pointen er, at vi nu kan straffe med de to nye NL, (P_1, P_2) og (Q_1, Q_2), hvis der ikke samarbejdes i 1. runde.

- (P_1, P_2) og (Q_1, Q_2) kan <u>ikke</u> genforhandles, fordi de ikke domineres af en anden NL.

Ideen til hvordan man støtter samarbejde i 1. runde (M_1, M_2) som et genforhandlings-sikkert underspilsperfekt udfald er nu klar:

1. Beløn (M_1, M_2) i 1. runde med (R_1, R_2) i 2. runde.

2. Bank spiller 1 i hovedet med (Q_1, Q_2) i 2. runde, hvis han afviger fra (M_1, M_2) i 1. runde.

3. Bank spiller 2 i hovedet med (P_1, P_2) i 2. runde, hvis ....

2.3.B Uendeligt gentagne spil.

Det viser sig, at det at gentage et spil uendeligt mange gange kan give væsentligt forskellige resultater end det at gentage det samme spil et meget stort, men endeligt, antal gange.

- F.eks. kan vi nu få samarbejde som et underspilsperfekt udfald i et uendeligt gentaget fangens dilemma.

- Det er et eksempel på, at man, selv når grundspillet har en entydig Nash-ligevægt, kan få underspilsperfekte udfald i et uendeligt gentaget spil, hvor der aldrig spilles grundspillets Nash-ligevægt.

Vi starter med et uendeligt gentaget fangens dilemma, følgende grundspil gentages i det uendelige:

		2	
		L_2	R_2
1	L_1	$1,1$	$5,0$
	R_1	$0,5$	$4,4$

- For hvert tidspunkt (hver runde) t observeres udfaldene fra de $t-1$ foregående spil af grundspillet før den t'te runde begynder.

Hvad er payoffs i et uendeligt gentaget spil?

- Det duer ikke bare at summere payoffs fra spillene i alle runderne.

- Så ville vi f.eks. ikke kunne se forskel på, om der altid blev spillet (L_1, L_2) eller altid (R_1, R_2); begge dele ville give ∞.

- Vi må indføre diskontering.

Definition.

Givet diskonteringsfaktoren $\delta \in (0,1)$ er nutidsværdien af den uendelige række af payoffs $\pi_1, \pi_2, \ldots$ lig med:

$$\pi_1 + \delta\pi_2 + \delta^2\pi_3 + \ldots = \sum_{t=1}^{\infty} \delta^{t-1}\pi_t$$

Man kan bruge δ til at omfortolke et uendeligt gentaget spil som et gentaget spil, der har et stokastisk sluttidspunkt:

Lad p være ssh. efter hver runde for at spillet slutter og $(1-p)$ ssh. for at det fortsætter til næste runde.

Lad δ' være diskonteringsfaktoren.

Hvis vi betragter næste periode med et payoff på π_1, før vi kaster mønten, der bestemmer, om vi går videre til næste periode, er (den forventede) værdi af π_1 lig

$$\delta' \cdot (1-p) \cdot \pi_1$$

Hvis den næste periode igen giver payoff π_2, er den forventede værdi

$$\left[\delta' \cdot (1-p)\right] \cdot \delta'(1-p)\pi_2 = (\delta')^2(1-p)^2\pi_2$$

Vi lader selvfølgelig så blot

$$\delta = \delta'(1-p)$$

Husk nu på hvorfor vi var "nødt til" at indføre diskontering, $\delta < 1$, nemlig for at undgå uendelige payoffs. Det kan vi nu opnå på to måder:

- (1) $\delta' < 1$ (2) $p > 0$

Vi vil nu definere følgende:

- Et uendeligt gentaget spil.
- En historie i et spil.
- Strategi i et gentaget spil.
- Underspil i gentagne spil.

Betragt et statisk spil G:

$$G = \{A_1, ..., A_n; u_1, ..., u_n\}$$

Definition

Givet et grundspil G, lad $G(\infty, \delta)$ betegne det uendeligt gentagne spil, hvor G gentages for evigt, og spillerne har en fælles diskonteringsfaktor δ. For hvert t observeres udfaldene af de $t-1$ foregående spil af grundspillet, før den t'te runde begynder. Hver spillers payoff i $G(\infty, \delta)$ er nutidsværdien af spillerens payoff fra den uendelige række af grundspil.

Hidtil har vi ikke været særlig nøjeregnende mht. at skelne mellem strategier og handlinger. Det bliver vi nødt til at være nu.

- Handlinger er det, en spiller kan foretage sig i en informationsmængde (her svarer det til hvad spillerne kan foretage sig i et grundspil).

- En historie et givet sted i et spillet er alt hvad der er sket (foretaget af handlinger) indtil dette sted i spillet.

- En strategi er en plan for, hvilke handlinger en spiller vil foretage sig i hver runde som funktion af alle spilleres tidligere handlinger, dvs. for en hver mulig historie.

I et gentaget spil taler vi om en historie til og med runde t:

$$\begin{matrix} (a_{11}, ..., a_{n1}) \\ \vdots \\ (a_{1t}, ..., a_{nt}) \end{matrix} \qquad a_{is} \in A_i$$

Vi har tidligere snakket om underspil (den generelle præcise definition gives i Gibbons afsnit 2.4.B).

Her kommer en definition for gentagne spil:

Definition

I det endeligt gentagne spil $G(T)$ er et underspil begyndende i runde $t+1$ det gentagne spil, i hvilket G spilles $T-t$ gange, betegnet $G(T-t)$. Der er mange underspil, der begynder i runde $t+1$, nemlig et for hver mulig historie til og med runde t.

I det uendeligt gentagne spil $G(\infty, \delta)$ er ethvert underspil, der begynder i runde $t+1$ identisk med det oprindelige spil $G(\infty, \delta)$. Der starter lige så mange underspil i runde $t+1$ af $G(\infty, \delta)$, som der er mulige historier til og med runde t.

Definition

En Nash-ligevægt er underspilsperfekt, hvis spillernes strategier udgør en Nash-ligevægt i ethvert underspil.

Bemærk: UPNL delmængde af NL. (En såkaldt refinement.)

Tilbage til det gentagne fangens dilemma. Vi vil antage at begge spilleres payoffs diskonteres med δ.

- Vi vil se, hvordan vi kan få samarbejde (R_1, R_2) i alle runder som et underspilsperfekt udfald af det uendeligt gentagne spil.

Antag at spiller i begynder med at samarbejde og samarbejder i alle runder, hvis og kun hvis begge spillere har samarbejdet i alle tidligere runder.

Strategien kan opskrives som:

- Spil R_i i første runde.

- Spil R_i i den t'te runde, hvis udfaldet i alle foregående $t-1$ runder har været (R_1, R_2); hvis ikke, spil L_i.

Dette er en "trigger strategi" - en "aftrækker strategi" - fordi blot en enkelt rundes manglende samarbejde udløser et skift til ikke-samarbejde for evigt.

For at vise at noget er en Nash-ligevægt eller en underspilsperfekt ligevægt i gentagne spil, må man altid lave betingelser på δ.

Dette ses let intuitivt af, at hvis $\delta = 0$ er spillerne ligeglade med fremtiden og vil da blot spille en Nash-ligevægt i grundspillet.

- Det samme må ofte gælde, hvis δ er tæt på nul.

Vi ser derfor tit udsagn i retning af:

- "Hvis δ er tilstrækkeligt stor, er ..."

Teknisk betyder dette, at man finder nogle betingelser på, at noget f.eks. er en Nash-ligevægt. Typisk er størrelsen af δ afgørende for, om betingelsen er opfyldt. Vi checker derfor, om betingelsen holder for hhv. $\delta = 0$ og $\delta = 1$. Hvis den ikke holder for $\delta = 0$, men gør det for $\delta = 1$ - og iøvrigt er "monoton i δ" - siger man så

- "Hvis δ er tilstrækkeligt stor, er ..."

Lad os først vise, at trigger-strategien beskrevet ovenfor er en Nash-ligevægt i vores uendeligt gentagne fangens dilemma, hvis δ er tilstrækkeligt stor.

- Antag at spiller i spiller ifølge trigger-strategien.

- Hvad er spiller j's bedste svar?

Siden spiller i vil spille L_i for evigt, hvis et tidligere udfald har været forskelligt fra (R_1, R_2), er det klart bedste svar for j også at spille L_j for evigt, hvis han observerer et udfald forskelligt fra (R_1, R_2).

Hvad skal han gøre i første runde eller en runde, hvor alle tidligere udfald har været (R_1, R_2)?

- Hvis han spiller L_j, får han 5 nu og 1 i al fremtid:

$$5 + \delta \cdot 1 + \delta^2 \cdot 1 \ldots = 5 + \frac{\delta}{1 - \delta}$$

- Hvis han spiller R_j, får han 4 nu og vil så befinde sig i nøjagtigt samme situation om en periode:

- Lad V være nutidsværdien af at spille optimalt. Hvis det at spille R_j er optimalt, er

$$\begin{aligned} V &= 4 + \delta V \Leftrightarrow \\ V &= \frac{4}{1 - \delta} \end{aligned}$$

- Hvis det at spille L_j er optimalt, er

$$V = 5 + \frac{\delta}{1-\delta}$$

- Det er altså optimalt at spille R_j, hvis og kun hvis

$$\frac{4}{1-\delta} \geq 5 + \frac{\delta}{1-\delta} \Leftrightarrow$$

$$\delta \geq 1/4$$

Her bliver: "Hvis δ er tilstrækkelig stor ..." altså: "Hvis $\delta \geq 1/4$", og vi får følgende resultat:

Det er en Nash-ligevægt for begge spillere at spille trigger-strategien, hvis og kun hvis $\delta \geq 1/4$.

Er det også underspilsperfekt?

I et uendeligt gentaget spil er ethvert underspil lig det oprindelige uendeligt gentagne spil.

I vores trigger-strategi NL kan vi inddele underspillene i to grupper:

1. Hvor udfaldene i alle tidligere runder har været (R_1, R_2). Dvs. underspil der starter på ligevægtsstien, on path.

2. Hvor der i mindst en tidligere runde har været et udfald forskellig fra (R_1, R_2). Dvs. underspil der starter off path.

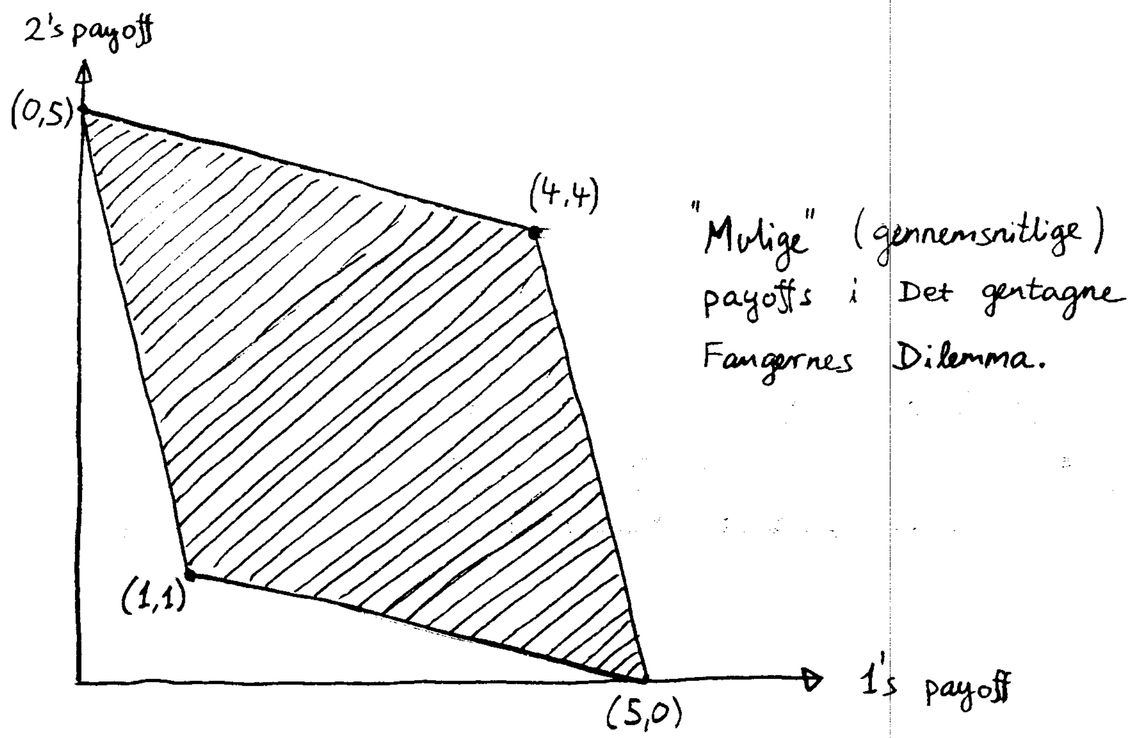
Hvis spillerne bruger trigger-strategier ser vi, at

1. I alle underspil af type (1) fortsættes med trigger-strategien, som vi ved er en Nash-ligevægt.

2. I alle underspil af type (2) gentages grundspillets Nash-ligevægt (L_1, L_2) for evigt, hvilket også er en Nash-ligevægt for det gentagne spil.

Konklusion: Trigger-strategi Nash-ligevægten i det uendeligt gentagne fangens dilemma er underspilsperfekt.

Kald payoffs $(x_1, ..., x_n)$ <u>mulige</u> i grundspillet G, hvis de er en konveks kombination af de rene-strategi payoffs i G.



Lad os sige at en spiller modtager det samme payoff i alle perioder, π. Nutidsværdien er

$$\pi + \delta \cdot \pi + \delta^2 \cdot \pi \ldots = \frac{1}{1-\delta} \cdot \pi$$

Det gennemsnitlige payoff er selvfølgelig π, som vi får ved at gange nutidsværdien med en faktor $(1-\delta)$.

Den samme ide kan man bruge generelt:

Definition

Givet en diskonteringsfaktor δ er det gennemsnitlige payoff af den uendelige række af payoffs $\pi_1, \pi_2, \ldots$ lig med

$$(1-\delta)\sum_{t=1}^{\infty}\delta^{t-1}\pi_t$$

Det gennemsnitlige payoff kan i modsætning til nutidsværdien direkte sammenlignes med periode-payoff $\sim$ payoff fra grundspillet.

Bemærk: Maksimering af det gennemsnitlige payoff er ækvivalent med maksimering af nutidsværdien.

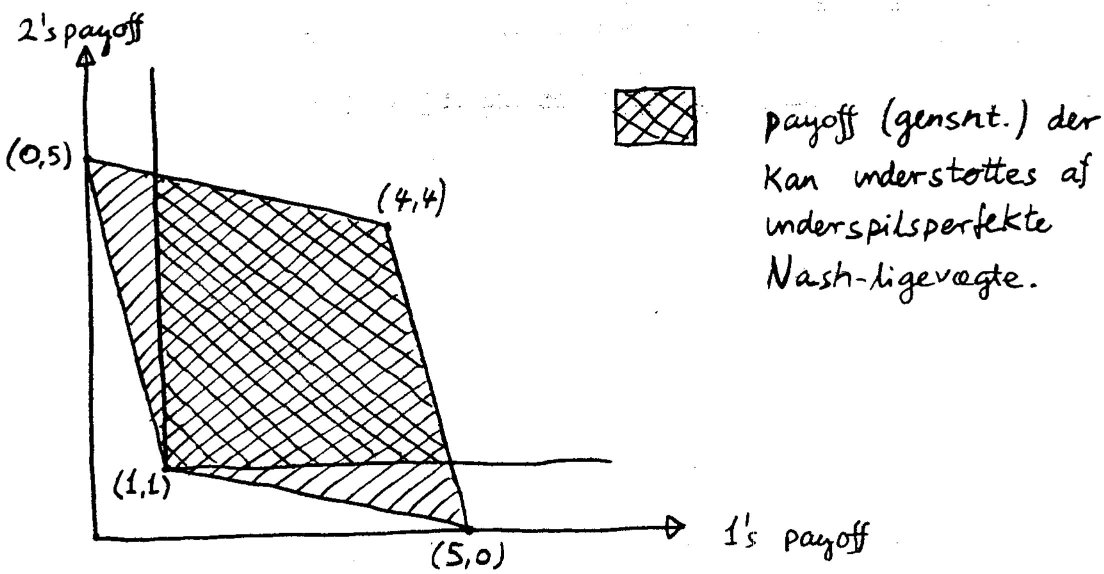
Theorem (Friedman 1971)

Lad G være et endeligt statisk spil med komplet information. Lad $(e_1, ..., e_n)$ være payoffs fra en Nash-ligevægt i G, og lad $(x_1, ..., x_n)$ betegne enhver anden mulig payoff-vektor fra G. Hvis $x_i > e_i$ for enhver spiller i, og hvis δ er tilstrækkelig tæt på 1, da eksisterer der en underspilsperfekt Nash-ligevægt i det uendeligt gentagne spil $G(\infty, \delta)$, som opnår $(x_1, ..., x_n)$ som gennemsnitligt payoff.

Kaldes også "The Folk Theorem".

Vi hopper over beviset (Appendix 2.3.B).

I vores fangens dilemma får vi:



Der er senere blevet lavet "folk theorems" for mange forskellige spil, som f.eks. kan variere m.h.t., hvor præcist man kan observere, om der bliver snydt og i så fald af hvem.

Specielt interesserede bør bide mærke i Gibbons' forklaring af, hvorfor fangens dilemma er et meget specielt spil, hvad angår folk theoremer.