Note til Spilteori

Gibbons s. 1-14

Spilteori beskæftiger sig med situationer, hvor der er strategisk afhængighed agenter imellem. Nytten for den enkelte agent afhænger således ikke alene af *egne* handlinger, men også af *andres* handlinger.

Egenskaber for spil:

- Konflikter (evt. nulsumsspil)
- Koordination

Spilteorien søger at løse agentens "problem" med udgangspunkt i disse egenskaber.

Man kan se på spil med statisk eller dynamisk tidsstruktur. Vi ser på statisk tid.

Spil på normalform

Vi ser på n spillere, $i = 1,2,\ldots, n$

Spiller i's strategimængde[1] er S_i og spiller i får et payoff u_i der afhænger af de andre spilleres valgte strategi:

$$u_i : \prod_{i=1}^{n} S_i \rightarrow \Re$$

Eks på notation:

Hvis vi ser på et spil med tre spillere, 1, 2 og 3, der har strategimængderne:

$S_1 = \{A, B\}$ $\quad$ $S_2 = \{a, b\}$ $\quad$ $S_3 = \{\alpha, \beta\}$

Hver enkelt spillers payoff-funktion er defineret på:

$$u_i : \prod_{i=1}^{3} S_i = \{A,B\} \times \{a,b\} \times \{\alpha,\beta\}$$

[1] S_i er spiller i's strategimængde, mens den konkret valgte strategi for spiller i benævnes s_i.

Eksempelvis er spiller 1's payoff-funktion defineret på:

$$u_1 : \prod_{i=1}^{3} S_i = \{A,B\}\times\{a,b\}\times\{\alpha,\beta\} = \overbrace{(\{A,B\})}^{S_1}\times\overbrace{(\{a,b\}\times\{\alpha,\beta\})}^{S_{-1}}$$

u_1 er således defineret på en mængde med $2\cdot2\cdot2 = 2^3 = 8$ elementer.

Tilsvarende notationen ovenfor kan spiller i's payoff-funktion skrives som defineret på mængden

$S_i \times S_{-1}$ idet S_{-1} angiver mængden af alle strategier for alle andre spillere end i, dvs.

$S_{-1} \equiv (S_1, S_2,\ldots, S_{i-1}, S_{i+1},\ldots, S_n)$

Strengt dominerede strategier

- **Definition:** Strategi s_i'' dominerer strengt strategi s_i' for spiller i, hvis

$$u_i(s_1,s_2,\ldots,s_{i-1},s_i',s_{i+1},\ldots,s_n) < u_i(s_1,s_2,\ldots,s_{i-1},s_i'',s_{i+1},\ldots,s_n)$$

eller på den nemmere skrivemetode

$$u_i(s_i',s_{-i}) < u_i(s_i'',s_{-i}) \quad \forall \quad s_{-i} \in \prod S_{-i}$$ ■

Dette betyder, at sige at strategi s_i'' dominerer strengt strategi s_i' for spiller i er det samme som at sige, at strategi s_i'' er bedre end strategi s_i' for spiller i uanset hvilken strategi de andre spillere vælger.

En iterativ sletning af strengt dominerede strategier kan give en entydig løsning, men langt fra altid!

Bedste svar

- **Definition:** Strategi s_i' er bedste svar til s_{-i} for spiller i, hvis

$$u_i(s_i',s_{-i}) \geq u_i(s_i,s_{-i}) \quad \forall \quad s_i \in S_i$$ ■

Dette betyder altså, at strategi s_i' er bedste svar til s_{-i} hvis denne strategi giver det højeste payoff, altså givet de andres specifikke valg s_{-i}.

Nash-ligevægt

- **Definition:** En Nash-ligevægt er en række strategier for alle spillere $(s_1^*, s_2^*, \ldots, s_i^*, \ldots, s_n^*)$ så for spiller *i* er s_i^* bedste svar til s_{-i}^* for alle *i*. ■

- Gode egenskaber ved Nash-ligevægt:
    - Spiller *i* har intet incitament til at afvige fra s_i^*, når de andre spiller s_{-i}^* (for alle *i*). ”Self-enforcing”.
    - Ingen fortrydelse.
    - Dermed robust / stabilt begreb.
- Dårlige egenskaber ved Nash-ligevægt:
    - Man kan godt spille en ”Nash-ligevægtsstrategi” uden at der kommer en Nash-ligevægt ud af det.

To sætninger om strengt dominerede strategier og Nash-ligevægt

- **Sætning A:** Hvis iterativ sletning af strengt dominerede strategier giver en entydig tilbage-værende $(s_1^*, s_2^*, \ldots, s_i^*, \ldots, s_n^*)$, da er $(s_1^*, s_2^*, \ldots, s_i^*, \ldots, s_n^*)$ en Nash-ligevægt. ■

- **Sætning B:** Hvis $(s_1^*, s_2^*, \ldots, s_i^*, \ldots, s_n^*)$ er en Nash-ligevægt, da vil $(s_1^*, s_2^*, \ldots, s_i^*, \ldots, s_n^*)$ ”overleve” iterativ sletning af strengt dominerede strategier. ■

Gibbons s. 14-21 og 27-29 – Anvendelser af Nash-ligevægt

Cournot-modellen

Cournot-modellen beskæftiger sig med et duopol, altså en situation, hvor vi har to producenter af det samme produkt.

Der gælder følgende:

- $MC = AC = c$
- $P(Q) = \begin{cases} a - Q & ,Q \le a \\ 0 & ,Q > a \end{cases} \qquad , a > c$

Der er en spilteoretisk problemstilling, fordi prisen på varen, og dermed også profitten, afhænger af ens egen producerede mængde samt altså prisen, der bestemmes ud fra den *samlede* produktion, dvs. både virksomhed 1's produktion og virksomhed 2's produktion.

$n = 2 \qquad S_1 = S_2 = [0;\infty[\qquad Q = q_1 + q_2$

Vi opskriver payoff, dvs. profit for den ene virksomhed[2]:

$$u_1 = u_1(q_1, q_2) = \pi(q_1, q_2) = P(Q)\cdot q_1 - c \cdot q_1 = P(q_1 + q_2)\cdot q_1 - c\cdot q_1 =$$
$$(a - q_1 - q_2)\cdot q_1 - c\cdot q_1 = a\cdot q_1 - q_1^{\,2} - q_1\cdot q_2 - c\cdot q_1$$

Denne søger virksomheden naturligvis at maksimere ved at ændre på sin *egen* produktion:

$$\max_{q_1}\left(a\cdot q_1 - q_1^{\,2} - q_1\cdot q_2 - c\cdot q_1\right)$$

$$F.O.C.: \quad a - 2\cdot q_1 - q_2 - c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad q_1 = \frac{a - c - q_2}{2} = R_1(q_2)$$

Det ses tydeligt her, at virksomhed 1's optimale produktion afhænger af virksomhed 2's produktion. Notationen $R_1(q_2)$ betyder at den ovenstående mængde er virksomhed 1's bedste svar (best Response) til virksomhed 2's produktion q_2. Pga. symmetri gælder, at

$$q_2 = R_2(q_1) = \frac{a - c - q_1}{2}$$

I Nash ligevægt svarer alle spillere det bedst mulige givet de andres valgte strategier. Derfor sætter vi responsfunktionerne $R_1(q_2)$ og $R_2(q_1)$ ind i hinanden:

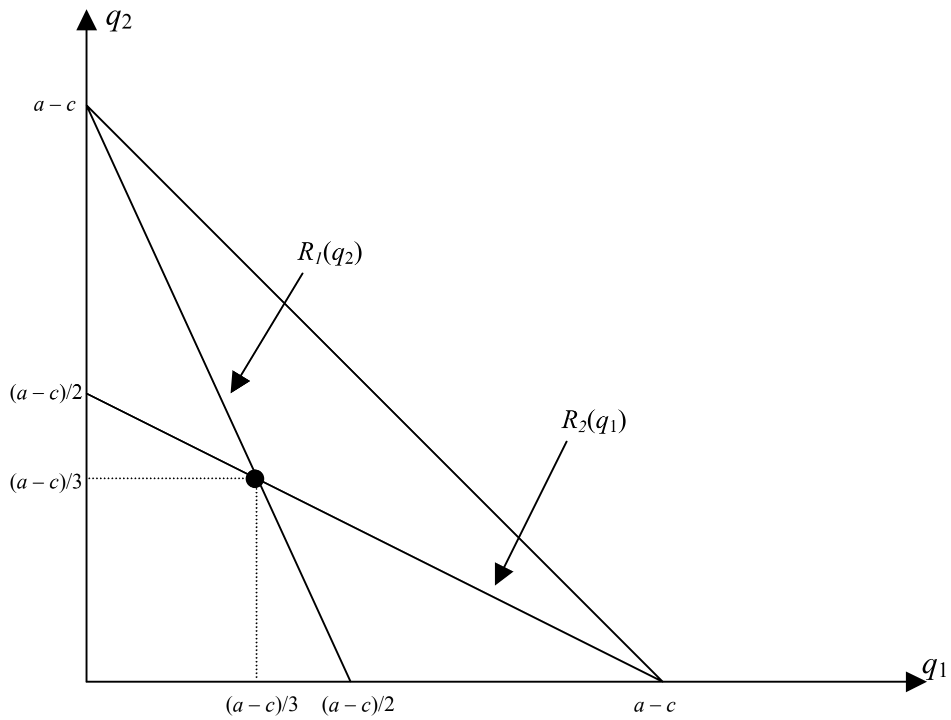
[2] Man kan vise, at den flade del af efterspørgselskurven aldrig bliver aktuel.

$$q_2 = \frac{a - c - \frac{a - c - q_2}{2}}{2} = \frac{a}{2} - \frac{c}{2} - \frac{a}{4} + \frac{c}{4} + \frac{q_2}{4} \quad \Leftrightarrow \quad 3q_2 = a - c \quad \Leftrightarrow \quad q_2^* = \underline{\underline{\frac{a-c}{3}}}$$

Vi sætter tilbage ind i virksomhed 1's best responsfunktion[3]:

$$q_1^* = \frac{a - c - \frac{a-c}{3}}{2} = \frac{a}{2} - \frac{c}{2} - \frac{a}{6} + \frac{c}{6} = \frac{a}{3} - \frac{c}{3} = \underline{\underline{\frac{a-c}{3}}}$$

Vi tegner løsningen ind i et diagram:



Prisen i denne ligevægt bliver:

$$P(Q) = P(q_1 + q_2) = a - q_1 - q_2 = a - \frac{a-c}{3} - \frac{a-c}{3} = \underline{\underline{\frac{a+2c}{3}}} = P^*(Q^*)$$

Vi vil nu prøve at sammenligne den fundne løsning (pris og mængde) med den pris og mængde-kombination der opstår ved hhv. fuldkommen konkurrence og monopol.

Vi starter med at se på monopol. Monopolisten maksimerer sin profit:

[3] Det ses naturligvis også umiddelbart pga. symmetri.

$$\max_{Q}(a-Q)\cdot Q-c\cdot Q$$

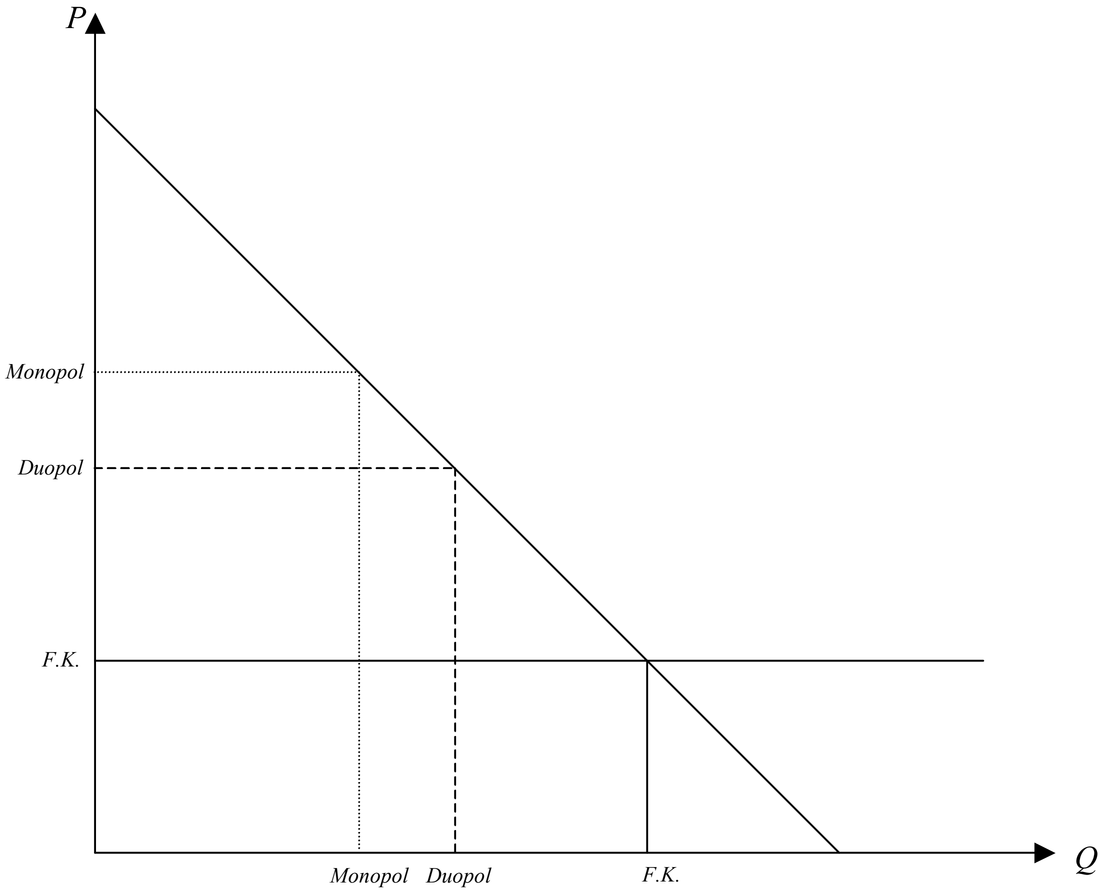
$$F.O.C.: \quad a-2Q-c=0 \quad \Leftrightarrow \quad Q=\underline{\underline{\frac{a-c}{2}}}$$

Prisen bliver $P\left(\frac{a-c}{2}\right)=a-\frac{a-c}{2}=\underline{\underline{\frac{a+c}{2}}}$

Under fuldkommen konkurrence ved vi, at prisen sættes lig marginalomkostningerne. Dvs.

$$P(Q)=c \quad \Rightarrow \quad c=a-Q \quad \Leftrightarrow \quad Q=a-c$$

Dermed kan vi lave følgende sammenlignende figur:



	Fuldkommen konkurrence	Duopol (Cournot)	Monopol
Mængde	←		
	$a-c$	$\frac{2}{3}\cdot(a-c)$	$\frac{1}{2}\cdot(a-c)$
Pris	→		
	c	$\frac{a}{3}+\frac{2c}{3}$ [4]	$\frac{a}{2}+\frac{c}{2}$
Profit	→		
	0	større	størst

Hvis to producenter producerer halvdelen af monopolmængden, så er der incitament for den enkelte producent til at producere mere end denne mængde, derfor er dette ikke en Nash ligevægt[5].

Tragedy of the commons

Problemstillingen består i følgende: En lille landsby med n bønder har et stykke fællesareal, hvor bøndernes geder kan gå omkring og græsse. Der er ingen restriktioner på antallet af geder som bonde i kan sætte ud; dette antal benævner vi g_i. Omkostningen for den enkelte bonde pr. ged er konstant c. Udbyttet pr. ged er $V(G)$, hvor G er det samlede antal geder, der græsser på fællesarealet, dvs. $G=\sum_{i=1}^{n} g_i$. Vi antager følgende om udbyttefunktionen: $V'(G) < 0$ og $V''(G) < 0$. Fortolkningen af dette er, at udbyttet pr. ged falder efterhånden som der kommer flere geder, og faldet bliver endda større og større jo flere geder der er i forvejen.

Den enkelte bondes payoff er givet ved udtrykket:

$$u_i(g_i, g_{-i}) = g_i \cdot V(G) - c \cdot g_i = g_i \cdot V(g_i + g_{-i}) - c \cdot g_i$$

Den enkelte bondes payoff afhænger både af hans eget valg og de andre agenters valg (antallet af geder), og derfor er problemstillingen spilteoretisk.

Vi maksimerer den enkelte bondes payoff:

F.O.C.: $$V(g_i + g_{-i}) + g_i \cdot V'(g_i + g_{-i}) - c = 0$$

Dette må gælde for alle n bønder (symmetrisk ligevægt), hvilket medfører, at

$$g_i^* = \frac{1}{n} \cdot G^* \Leftrightarrow G^* = n \cdot g_i^*$$

[4] hvilket er større end c, da $a > c$.
[5] Påstanden kan vises ved at indsætte i best Response funktionerne.

Dvs. $V(G^*) + \frac{1}{n} \cdot G^* \cdot V'(G^*) - c = 0$ (1*)

, hvilket altså er førsteordensbetingelsen for G^* i en Nash ligevægt.

Vi vil nu udlede det *sociale optimum*. Her maksimeres det samlede payoff:

$$\max_G G \cdot V(G) - c \cdot G \quad \Rightarrow \quad V(G^{**}) + G^{**} \cdot V'(G^{**}) - c = 0 \tag{2*}$$

- **Påstand:** $G^{**} < G^*$.
- **Bevis:** Beviset for ovenstående fås ved et såkaldt *modstridsbevis*, og ved at betragte ligningerne (1*) og (2*).

  Antag at påstanden *ikke* er sand, dvs. $G^{**} \geq G^*$. Så må gælde:

  - $V(G^{**}) \leq V(G^*)$, *da* $\frac{dV}{dG} < 0$
  - $V'(G^{**}) \leq V'(G^*) < 0$, *da* $\frac{d^2V}{dG^2} < 0$
  - $G^{**} > \dfrac{G^*}{n}$, *da* $n \in > N$ *og dermed* $n > 1$

  Alt i alt indebærer disse tre ting, at venstresiden i ligning (1*) er strengt større end venstresiden i ligning (2*). Dette giver en klar modstrid, da de begge skal være lig med nul. Ergo er påstanden bevist. ■

Implikationen af dette faktum er altså, at det antal geder som bønder samlet set sender ud på marken, overstiger det socialt optimale. Der forekommer altså overgræsning – tragedy of the commons!

<u>Gibbons s. 143-152</u>

<u>Cournot-modellen forskellige omkostningsniveauer</u>

Nu ser vi igen på Cournot-modellen, men denne gang med forskellige omkostningsniveauer c_1 og c_2 for de to virksomheder. Deres best response funktioner og Nash ligevægten[6] bliver nu:

$$\begin{aligned} q_1 &= R_1(q_2) = \frac{a - c_1 - q_2}{2} \\ q_2 &= R_2(q_1) = \frac{a - c_2 - q_1}{2} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad N.E.: \quad \begin{aligned} q_1^* &= \frac{a - 2c_1 + c_2}{3} \\ q_2^* &= \frac{a - 2c_2 + c_1}{3} \end{aligned}$$

Fortolkningen af at den anden virksomheds omkostninger indgår som ”plus” er, at hvis den anden virksomhed har høje omkostninger, så giver det en lav respons fra den anden virksomhed, og det medfører at der er mere ”plads” på markedet til en selv.

<u>Bayesiansk opdatering</u>

Bayes’ formel udtaler sig om betingede sandsynligheder:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Ud fra denne sammenhæng kan de enkelte agenter opdatere deres sandsynligheder ud fra at de observerer B. Dette kaldes Bayesiansk opdatering af subjektive sandsynligheder.

$$\text{A priori sandsynligheder} \xrightarrow{\text{observation}} \text{A posteriori sandsynligheder}$$

<u>Eks:</u>

	a	b
A	0,50	0,10
B	0,05	0,35

Bayes’ formel kan derefter give os de subjektive sandsynligheder. Hvis f.eks. spilleren med udfaldsrummet $\{a, b\}$ observerer udfaldet b. Da er:

[6] Kan som før vises, ved at indsætte best response funktionerne i hinanden, og løse som 2 ligninger med 2 ubekendte.

$$\left.\begin{array}{l} P(A\,|\,b)=\dfrac{P(A\cap b)}{P(b)}=\dfrac{0{,}10}{0{,}10+0{,}35}=0{,}22 \\ P(B\,|\,b)=\dfrac{P(B\cap b)}{P(b)}=\dfrac{0{,}35}{0{,}10+0{,}35}=0{,}78 \end{array}\right\} \qquad P(A\,|\,b)+P(B\,|\,b)=1$$

<u>Cournot-modellen med asymmetrisk information</u>

Atter en gang ses nu på Cournot-modellen. Denne gang med følgende antagelser:

- Omkostningsniveauet for virksomhed 1 er c_1.
- Omkostningsniveauet for virksomhed 2 kender *kun* virksomhed 2 til c_2. For virksomhed 1 er den enten c_H (høje omkostninger) eller c_L (lave omkostninger) med sandsynlighederne hhv. θ og $(1-\theta)$.

Virksomhed 1 ønsker at maksimere udtrykket:

$$\max_{q_1}\left(\theta\cdot\pi_1\left(q_1,q_2^*(c_H)\right)+(1-\theta)\cdot\pi_1\left(q_1,q_2^*(c_L)\right)\right) \quad\Rightarrow$$

$$\max_{q_1}\left(\theta\cdot\left(q_1\cdot\left(a-c-q_1-q_2^*(c_H)\right)\right)+(1-\theta)\cdot\left(q_1\cdot\left(a-c-q_1-q_2^*(c_L)\right)\right)\right)$$

F.O.C.:

$$\begin{aligned} &\theta\cdot\left(a-c-q_2^*(c_H)-2q_1\right)+(1-\theta)\cdot\left(a-c-q_2^*(c_L)-2q_1\right)=0 \quad\Leftrightarrow \\ &2\cdot\theta\cdot q_1-2\cdot\theta\cdot q_1+2\cdot q_1=\theta\cdot\left(a-c-q_2^*(c_H)\right)+(1-\theta)\cdot\left(a-c-q_2^*(c_L)\right) \quad\Leftrightarrow \qquad (*3) \\ &q_1=R_1(q_2)=\tfrac{1}{2}\cdot\left(\theta\cdot\left(a-c-q_2^*(c_H)\right)+(1-\theta)\cdot\left(a-c-q_2^*(c_L)\right)\right) \end{aligned}$$

Virksomhed 2 har to best response funktioner givet dens eget omkostningsniveau:

$$q_2^*(c_H)=R_2(q_1;c_H)=\frac{a-c_H-q_1}{2}$$
$$q_2^*(c_L)=R_2(q_1;c_L)=\frac{a-c_L-q_1}{2}$$

Disse to ligninger sammen med (*3) giver os ligevægten. Vi skal derfor løse tre ligninger med tre ubekendte. Vi starter med at sætte de to nederste ligning ind i (*3):

$$q_1=\tfrac{1}{2}\cdot\left(\theta\cdot\left(a-c-\frac{a-c_H-q_1}{2}\right)+(1-\theta)\cdot\left(a-c-\frac{a-c_L-q_1}{2}\right)\right) \quad\Leftrightarrow$$

$$q_1=\tfrac{1}{2}\cdot\left(\theta\cdot\left(a-c-\tfrac{a}{2}+\tfrac{c_H}{2}+\tfrac{q_1}{2}\right)+(1-\theta)\cdot\left(a-c-\tfrac{a}{2}+\tfrac{c_L}{2}+\tfrac{q_1}{2}\right)\right) \quad\Leftrightarrow$$

$$q_1-\theta\cdot\tfrac{q_1}{4}+\theta\cdot\tfrac{q_1}{4}-\tfrac{q_1}{4}=\tfrac{1}{2}\cdot\left(\theta\cdot\tfrac{c_H}{2}+(1-\theta)\cdot\tfrac{c_L}{2}+\tfrac{a}{2}-c\right)=\tfrac{a}{4}-\tfrac{c}{2}+\theta\cdot\tfrac{c_H}{4}+(1-\theta)\cdot\tfrac{c_L}{4}$$

$$\underline{\underline{q_1^*=\frac{a-2c+\theta\cdot c_H+(1-\theta)\cdot c_L}{3}}}$$

For at finde virksomhed 2's optimale produktion, så indsætter vi blot tilbage igen i de to best response funktioner for virksomhed 2:

$$\left.\begin{aligned} q_2^*(c_H) = R_2(q_1; c_H) = \frac{a - c_H - q_1}{2} = \tfrac{1}{2}\cdot\left(a - c_H - \tfrac{1}{3}\cdot\left(a - 2c + \theta\cdot c_H + (1-\theta)\cdot c_L\right)\right) \\ q_2^*(c_L) = R_2(q_1; c_L) = \frac{a - c_L - q_1}{2} = \tfrac{1}{2}\cdot\left(a - c_L - \tfrac{1}{3}\cdot\left(a - 2c + \theta\cdot c_H + (1-\theta)\cdot c_L\right)\right) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$q_2^*(c_H) = \tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}c_H - \tfrac{1}{6}a + \tfrac{1}{3}c - \tfrac{1}{6}\theta\cdot c_H + \tfrac{1-\theta}{6}\cdot c_L = \underline{\underline{\frac{a - 2\cdot c_H + c}{3} + \frac{1-\theta}{6}\cdot(c_H - c_L)}}$$

$$q_2^*(c_L) = \tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}c_L - \tfrac{1}{6}a + \tfrac{1}{3}c - \tfrac{1}{6}\theta\cdot c_H + \tfrac{1-\theta}{6}\cdot c_L = \underline{\underline{\frac{a - 2\cdot c_L + c}{3} - \frac{\theta}{6}\cdot(c_H - c_L)}}$$

Hermed er ligevægten fundet.

Bayesiansk spil (på normalform)

Et Bayesiansk spil på normalform specificerer:

- Spillere $i \in \{1, \ldots, n\}$
- Spillerne har handlingsmængderne $A_1, \ldots, A_n$
- Spillerne har typemængderne $T_1, \ldots, T_n$.[7]
- En a priori sandsynlighedsfordeling på typerummet: $T = T_1 \times \ldots \times T_n$.
- Spillerne har individuelle opdaterede *beliefs* : $p_i(t_{-i} \mid t_i)$. Spiller i's betingede sandsynlighed for at de andre spillere realiseres som typerne t_{-i} givet at i selv er realiseret som type t_i.[8]

En strategi for en spiller i definerer en funktion $s_i : T_i \rightarrow A_i$. Strategien fortæller altså hvilken aktion agenten skal foretage (hvad han skal gøre) givet hans type.

Bayes-Nash ligevægt

- **Definition:** En Bayes-Nash ligevægt består af en mængde strategier $(s_1^*, \ldots, s_n^*)$, hvor $s_i^*(t_i)$ løser maksimeringsproblemet:

$$\max_{a_i \in A_1} \sum_{t_{-i}} u_i\left(a_i, s_{-i}^*(t_{-i}), t_i\right)\cdot p_i(t_{-i} \mid t_i)$$ ■

Samtidig løser s_{-i}^* derfor sammen problem for de øvrige spillere, givet *deres* beliefs.

[7] Både typemængderne og handlingsmængderne kan være såvel diskrete som kontinuerte.
[8] Dannes ud fra Bayesiansk opdatering af sandsynligheder baseret på egen observation (af sin egen type).

Sådan findes Bayes-Nash ligevægte

1. Dan beliefs. For hver spiller i dannes $p_i\,(t_{-i}\mid t_i)$. (Bayes formel)
2. Find spiller i's bedste svar givet $(-i)$'s strategier[9]. For hver i-type – find bedste svar-handling. Realiseret payoff skal maksimeres mht. handlingen a_i.[10]
3. Bedste svar-strategi fås ved at stykke bedste svar-handlinger sammen.
4. Find kombinationen af strategier, der giver en Bayes-Nash ligevægt.

[9] Bemærk at en spiller har (antal aktionsmuligheder) opløftet til (antal typer) strategier. Dvs. hvis en person har 3 aktionsmuligheder og tre antal mulige typer, så har han $3^3 = 27$ mulige forskellige strategier.
[10] Se definitionen af Bayes-Nash ligevægt ovenfor.

Gibbons s. 155-157 og 164-168

First Price Sealed Bid auktion

Auktionen fungerer sådan, at der afgives lukkede bud, og højeste bud vinder og betaler *sit* bud. Typerne i dette "spil" er den enkelte "spillers" værdiansættelse af det pågældende gode. Vi antager at denne værdi er et uniformt / rektangulært fordelt tal på intervallet [0;1]. t_i'erne er uafhængigt fordelt.

Vi ser på to spillere med typerne v_1 og v_2, der angiver spillernes værdiansættelse af det pågældende aktiv. Handlingen i dette spil er et bud mellem 0 og 1. $A_1 = A_2 = [0;1]$.

Payoff til spiller i fra auktionen er[11]:

$$u_i(b_i, b_{-i}, v_i) = \begin{cases} v_i - b_i & , \; b_i > b_{-i} \\ \frac{1}{2}\cdot(v_i - b_i) & , \; b_i = b_{-i} \\ 0 & , \; b_i < b_{-i} \end{cases}$$

Spiller i ønsker således at maksimere udtrykket[12]:

$$\max_{b_i}\left((v_i - b_i)\cdot p(b_i > b_{-i}(v_{-i})) + \tfrac{1}{2}\cdot(v_i - b_i)\cdot p(b_i = b_{-i}(v_{-i}))\right)$$

Vi satser nu på, for at indsnævre undersøgelsen, at vi kan finde en lineær strategi der løser problemet – udgør en Bayes-Nash ligevægt. Det viser sig at denne rent faktisk eksisterer og endda er entydig ved[13]:

$$b_i^*(v_i) = \tfrac{1}{2}\cdot v_i \qquad b_{-i}^*(v_{-i}) = \tfrac{1}{2}\cdot v_{-i}$$

Man skal altså byde halvdelen af sin vurdering af aktivet.

Bemærk imidlertid de meget skrappe antagelser der er gjort: antallet af spillere, fordelingen af typer, uafhængighed, lineær strategi…

[11] Generelt afhænger payoff funktionen også af de andre spilleres typer – v_{-i}, men i dette specifikke tilfælde indgår denne størrelse ikke.
[12] Bemærk, at sandsynlighederne er objektive og ikke betingede i dette tilfælde – vi har antaget, at typerne er uafhængige.
[13] Se Gibbons: op.cit. s. 156 for beviset.

Second Price Sealed Bid auktion

Auktionen fungerer sådan, at der afgives lukkede bud, og højeste bud vinder og betaler det *næsthøjeste* bud.

Igen er typerne i dette ”spil” den enkelte ”spillers” værdiansættelse af det pågældende gode.

I denne auktionsform er det en svagt dominerende strategi at byde sin vurdering.

Vi betragter kun bud i intervallet $[0;v_i]$ – et højere bud indeholder risiko for negativt payoff. Her vil det være svagt dominerende at byde sin vurdering v_i, fordi højere bud forhøjer kun sandsynligheden for at vinde auktionen, men payoff'et påvirkes ikke at højere bud. Betragt payoff funktionen:

$$u_i = \begin{cases} v_i - b_j & , \; b_i > b_j \\ \frac{1}{2} \cdot (v_i - b_j) & , \; b_i = b_j \\ 0 & , \; b_i < b_j \end{cases}$$

Her ses det tydeligt at ens eget bud b_i ikke indgår i selve payoff funktionen, og derfor forhøjer man kun sin *sandsynlighed* ved at byde højt, mens payoff'et ikke bliver mindre, så længe $b_i \leq v_i$. Dermed bliver det forventede payoff højere med højere bud.