# Note til mikro : Tid, usikkerhed og aktiver.

## Varian kap. 10 – Intertemporale valg

Den almene forbrugerteori, kan nemt udvides til også at involvere forbrug over tid. Valg af forbrug over tid kaldes for *intertemporale valg*.

Vi betragter en forbruger, der den exogene indkomst $m_1$ i periode 1, og den exogene indkomst $m_2$ i periode 2. Hans forbrug af det "aggregerede forbrugsgode" i de to perioder benævner vi $x_1$ og $x_2$.

- *Budgetbetingelsen.*
  Vi antager, at udlånsrenten er lig med indlånsrenten, og vi benævner den $r$.
  Budgetbetingelsen er som sædvanlig $p_1x_1 + p_2x_2 = p_1m_1 + p_2m_2$. Ved at sætte hhv. $x_1$ og $x_2$ som numeraire prisen opnås de to nye budgetbetingelser:
  1. $(1+r)c_1 + c_2 = (1+r)m_1 + m_2$
  2. $c_1 + \frac{c_2}{1+r} = m_1 + \frac{m_2}{1+r}$

  Ligning 1 udtrykker budgetbetingelsen i fremtidsværdi (alt måles i $c_2$, da dennes pris er valgt som numeraire). Ligning 2 udtrykker budgetbetingelsen i nutidsværdi (alt måles i $c_1$, da dennes pris er valgt som numeraire).
  Budgetlinien er en ret linie med hældningen – $(1 + r)$ og den skærer 2. aksen i fremtidsværdien $(1 + r)m_1 + m_2$, da

  $$(1+r)c_1 + c_2 = (1+r)m_1 + m_2 \quad <=> \quad c_2 = -(1+r) + (1+r)m_1 + m_2$$

  Budgetlinien skærer 1. aksen i nutidsværdien $m_1 + \frac{m_2}{1+r}$.[1]
  Hvis der var forskellige udlåns- og indlånsrenter, så ville budgetlinien have et knæk omkring endowmentpunktet $(m_1, m_2)$.
- *Forbrugerens præferencer.*
  - *Monotone præferencer* har den fortolkning i det intertemporale tilfælde, at man anser såvel forbrug i dag som forbrug i morgen som et gode, ikke et onde, og følgelig gerne vil have mere af det.
  - *Konvekse præferencer* har den fortolkning i det intertemporale tilfælde, at man gerne vil glatte sit forbrug ud over tid.

[1] Ses ved at sætte $c_2$ lig med nul i budgetbetingelse 2.

- *Hældningen på indifferenskurven* viser forbrugerens subjektive vurdering af forbrug i dag i forhold til forbrug i morgen.

| | | |
|---|---|---|
| Tålmodig forbruger | Flad indifferenskurve | \|MRS\| lille |
| Utålmodig forbruger | Stejl indifferenskurve | \|MRS\| stor |

- *Forbrugerens valg* er som sædvanlig dér, hvor *MRS* er lig det relative prisforhold.

$$MRS = -\frac{p_1}{p_2} = -\frac{1+r}{1} = -(1+r)$$

Tålmodige forbrugere låner penge ud til de utålmodige forbrugere.

- *Komparativ statik.*

Vi ser nu på virkningerne af en rentestigning. Det har den umiddelbare konsekvens af forbrug i morgen bliver relativt billigere i forhold til forbrug i dag, hvis vi antager at begge varer er normale goder. Det er klart, at

- *Opsparere* kan godt lide rentestigninger.
- *Nedsparere* kan ikke lide rentestigninger.

Vi ser på opdelingen af ændringen i forbruget ved rentestigningen via Slutsky ligningen:

Vi ser på den tålmodige forbruger (opspareren):

| | | |
|---|---|---|
| Substitutionseffekten…………………… | $x_2\uparrow$ | $x_1\downarrow$ |
| Indkomsteffekten……………………….. | $x_2\uparrow$ | $x_1\uparrow$ |
| Total effekt…………………………….... | $x_2\uparrow$ | $x_1$ ??? |

Vi kan altså sige, at efter rentestigningen vil udlåneren fortsat være udlåner, men vi kan ikke udtale os om, hvorvidt opsparingen for opspareren vil stige eller falde ved en rentestigning.

Hvis vi vil se på nedsparerens reaktion ved en rentestigning, så gælder det at substitutionseffekten entydigt trækker i retning af højere $x_2$ og lavere $x_1$:

| | | |
|---|---|---|
| Substitutionseffekten…………………… | $x_2\uparrow$ | $x_1\downarrow$ |
| Indkomsteffekten……………………….. | $x_2\downarrow$ | $x_1\downarrow$ |
| Total effekt…………………………….... | $x_2$ ??? | $x_1\downarrow$ |

Indkomsteffekten trækker mod mindre forbrug af begge varer, da nedspareren netop er nedsparer. Vi kan dermed kun udtale os om, at nedspareren ved en rentestigning vil sænke sit forbrug i dag, men vi kan ikke udtale os om, hvorvidt han fortsat vil være nedsparer, eller om han vil skifte til at være opsparer.

- *Livstidsbudgetbegrænsningen.*

$$\sum_{t=1}^{T} \frac{x_t}{(1+r_1)(1+r_2)\ldots(1+r_t)} = \sum_{t=1}^{T} \frac{\omega_t}{(1+r_1)(1+r_2)\ldots(1+r_t)}$$

Fortolkningen er, at summen af det tilbagediskonterede[2] forbrug i alle perioder i ens liv (fra *t* til *T*) skal være lig med summen af den tilbagediskonterede løn i alle perioder.

- *Præferencer over tid.*

Af hensyn til simpliciteten i beregninger antages ofte en additiv nyttefunktion over tid. En intertemporal nyttefunktion antager ofte standardformen:

$$U(x_1, x_2, \ldots, x_T) = \sum_{t=1}^{T} u(x_t) \cdot \delta^{t-1} \qquad 0 < \delta \leq 1$$

hvor $\delta^{t-1}$ kaldes diskonteringsfaktoren.

[2] Alt måles i nutidsværdi.

## Varian kap. 11 – Aktiver

Kapitel 11 er et mindre essentielt kapitel, omhandlende aktiver uden usikkerhed. Der er dog med følgende pointer i kapitlet:

- Aktiver er en måde hvorpå den enkelte forbruger kan overføre forbrug / indkomst mellem tidspunkter.
- Prisfastsættelse af aktiver uden usikkerhed sker efter ”***No arbitrage”*** princippet – at det samlede afkast (efter skat) skal være det samme for alle aktiver. Ellers ville der være en risikofri arbitragemulighed i at skifte til et andet aktiv.
- *No arbitrage* princippet har den implikation, at priserne må indstille sig herpå. Det betyder i praksis, at alle aktiver uden risiko sælges til deres nutidsværdi.

**<u>Varian kap. 12 - Usikkerhed</u>**

Kapitel 12 omhandler usikkerhed.

Vi antager her følgende:

- Den usikkerhed forbrugeren står over for kan resultere i et endeligt antal udfald af en hændelse; disse udfald kalder vi tilstande.
- Hver tilstand har en på forhånd kendt sandsynlighed for at indtræffe.

Det at der er usikkerhed muliggør handel med usikkerheden:

- <u>Forsikring:</u> Man kan mindske sin initiale risiko ved at købe en forsikringskontrakt.
- <u>Investering:</u> Man kan gå *ind* i øget risiko gennem investering (i håb om gevinst)

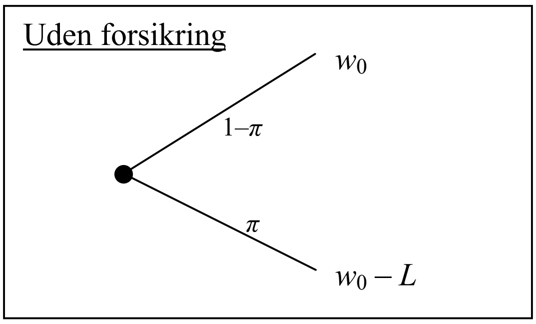
Vi vil beskæftige os med forbrug / indkomst i forskellige tilstande.
En forbrugers forbrugsplan afhænger af den tilstand man havner i.

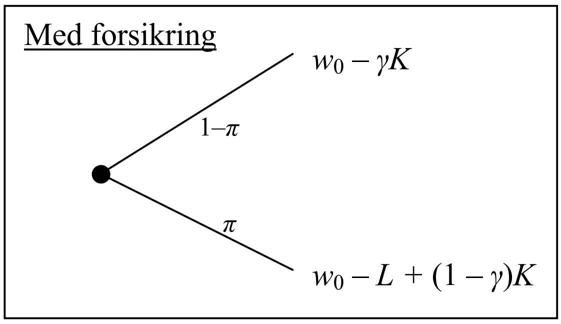
Vi starter med at se på et særtilfælde med kun to tilstande. Man kan tænke situationen som en forbrugeren der forsikrer sig mod en bestemt hændelse der vil koste ham en given sum $L$, og som indtræffer med sandsynligheden $\pi$. Hans indkomst <u>uden</u> usikkerhed er $w_0$ (hans løn).

Vi antager at prisen på forsikring er proportional med den forsikrede sum, dvs. at prisen pr. forsikret enhed er konstant $\gamma$ , dvs. at forbrugerens "præmie", hvis forsikringssummen er $K$ således er $\gamma K$. Hvis forbrugeren vælger at forsikre sig med forsikringssummen $K$, så er den "ekstra indkomst" han får givet ved:

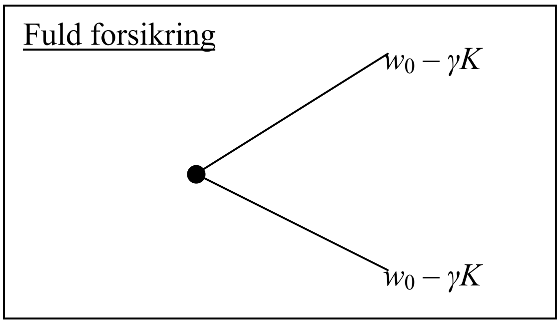
- Hvis hændelsen <u>ikke</u> indtræffer: $-\gamma K$
- Hvis hændelsen indtræffer: $K - \gamma K$

Dermed er forbrugerens indkomst i de enkelte tilstande givet ved:



Hvis forbrugeren vælger at forsikre sig fuldt ud, dvs. at forsikringssummen $K = L$, så er forbrugerens indkomst det samme uanset udfaldet af hændelsen – deraf benævnelsen *fuld forsikring*:



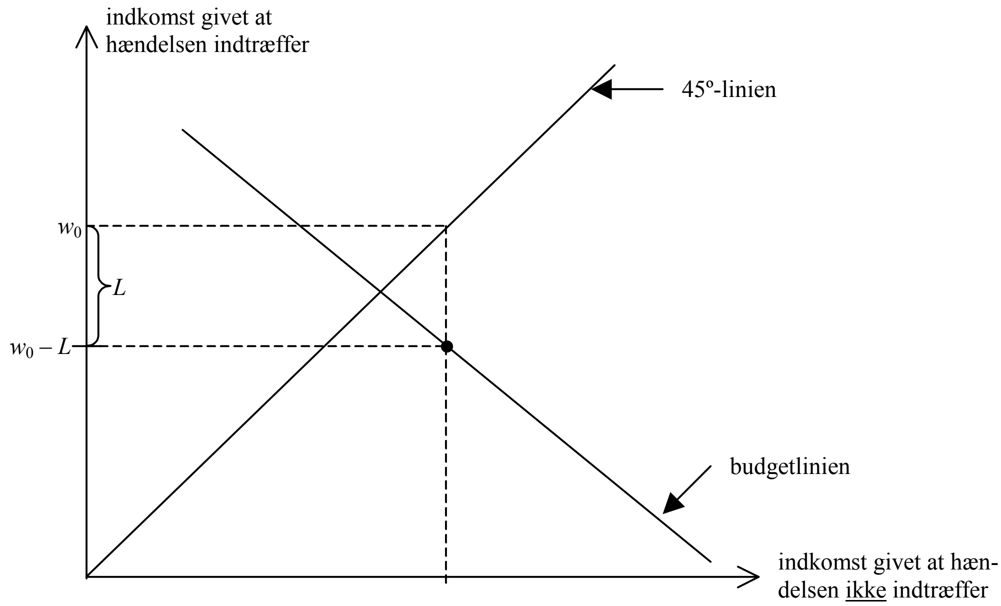

Vi vil nu prøve at illustrere problemstillingen med forsikring vha. en budgetlinie på sædvanlig vis. Ud af 1. aksen afsætter vi indkomsten for forbrugeren givet at hændelsen ikke indtræffer, og ud af 2. aksen afsætter vi indkomsten for forbrugeren givet at hændelsen indtræffer. Ved ingen forsikring, så vil indkomsten som nævnt være $w_0 - L$, hvis hændelsen indtræffer, og $w_0$ hvis hændelsen ikke indtræffer. Derfor må punktet $(w_0 - L, w_0)$ ligge på budgetlinien. Vi skal nu finde hældningen på budgetlinien. Dette gøres ved at tage kvotienten mellem den ekstra indkomst forbrugeren får, hvis hændelsen indtræffer og den ekstra indkomst forbrugeren får, hvis hændelsen ikke indtræffer:

$$hældning = \frac{\Delta indkomst\ givet\ hændelse}{\Delta indkosmst\ givet\ ej\ hændelse} = \frac{K - \gamma K}{-\gamma K} = -\frac{\gamma}{1-\gamma}$$

Vi kender således nu et punkt på budgetlinien, nemlig $(w_0 - L, w_0)$ og hældningen $-\frac{\gamma}{1-\gamma}$, og kan derfor nu tegne budgetlinien.

På figuren er desuden indlagt 45°-linien, der repræsenterer en usikkerhed på 0, da indkomst overalt er den samme uanset om hændelsen indtræffer eller ej.

Hvis forbrugeren vælger at forsikre sig, så bevæger han sig op ad budgetlinien fra punktet $(w_0 - L, w_0)$, som man kan kalde hans endowment punkt. Hvis han bevæger sig helt op til 45°-linien, så har han valgt fuld forsikring. Hvis han bevæger sig endnu højere op, så vælger han at overforsikre, dvs. at hans indkomst er højere hvis hændelsen indtræffer end hvis den ikke indtræffer.




Nyttefunktioner med usikkerhed

Som regel antager vi at forbrugeren har Von Neumann-Morgenstern præferencer.
Målet for forbrugeren er at maksimere sin forventede nytte[3]. Denne er givet ved

$$\sum_{i=1}^{i_{\max}} \pi_i \cdot u(x_i) \qquad , \quad i \in \{1,2,\ldots,i_{\max}\}$$

hvor funktionen $u$ er en Bernoulli voksende nyttefunktion, og hvor $x_i$ angiver forbruget i tilstand $i$.

Det gælder generelt, at enhver positiv monoton transformation af en nyttefunktion stadig repræsenterer de samme præferencer. For at bevare egenskaberne om forventet nytte som en vægtet sum af nytten i de enkelte tilstande, så siger vi imidlertid at den eneste tilladte transformation af en forventet nytte funktion er en positiv affin transformation[4].

Den forventede nytte funktion er lineær i sandsynlighederne. Det har følgende implikationer:

- Marginalnytten afhænger kun af det initiale forbrug af det pågældende forbrug, ikke af initialt forbrug af forbrug i andre tilstande.
- Det marginale substitutionsforhold (MRS) mellem forbrug i to tilstande afhænger ikke af andre forbrug end forbruget i netop de to tilstande.

[3] Varian viser i Microeconomic Analysis 3rd ed. 1992 s. 173-176 at givet nogle specifikke aksiomer, så eksisterer en sådan nyttefunktion, og den er entydigt bestemt indtil en affin transformation.
[4] Andre transformationer kan godt repræsentere de samme præferencer, men har da ikke fortolkningen omkring forventet nytte.

Egenskaber for den forventede nytte funktion – Risikoaversion

Der gælder følgende om Bernoulli funktionen *u*:

| | | |
|---|---|---|
| u (strengt) konkav | <=> | Forbruger (strengt) risikoavers |
| u (strengt) konveks | <=> | Forbruger (strengt) risikoelsker |
| u lineær | <=> | Forbruger risikoneutral |

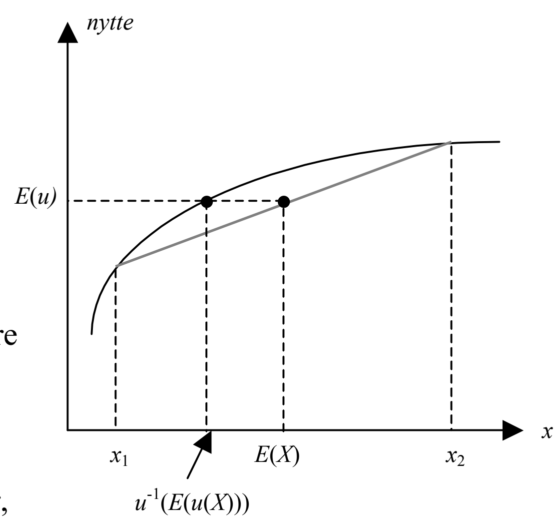
Hvis man tænker på det som et lotteri, så gælder det af en strengt risikoavers agent foretrækker altid den forventede gevinst af lotteriet frem for at spille om gevinsten. Omvendt naturligvis for en risikoelsker – pr. definition. Risikoneutrale agenter er indifferente mellem af spille om gevinsten og få den forventede gevinst af lotteriet.

| | | |
|---|---|---|
| Strengt risikoavers agent[5] | $E(X) \succ X$ | $v(E(X)) > v(X)$ |
| Strengt risikoelskende agent | $E(X) \prec X$ | $v(E(X)) < v(X)$ |
| Risikoneutral agent | $E(X) \sim X$ | $v(E(X)) = v(X)$[6] |

Sikkerhedsækvivalenten af *X*.

Sikkerhedsækvivalenten er det man vil "betale for at være med i lotteriet", hvis vi bliver i denne terminologi, og er givet ved:

$$u^{-1}(E(u(X)))$$




For en strengt risikoavers agent som vist i figuren til venstre vil sikkerhedsækvivalenten altid være mindre end det forventede afkast $E(X)$, da agenten vil betale mindre for at være med i lotteriet end det forventede afkast af lotteriet er, netop fordi han er risikoavers. Omvendt vil en strengt risikoelskende agents sikkerhedsækvivalent altid være større end det forventede afkast. For en risikoneutral agent vil sikkerhedsækvivalenten netop være lig med det forventede afkast.

[5] For en (ikke-strengt) risikoavers funktion gælder det, at $E(X)$ er *svagt* foretrukket for $X$, dvs. $v(E(X)) \geq v(X)$.
[6] Hvor nyttefunktionen $v$ repræsenterer agentens præferencer.

<u>Mål for risikoaversion</u>

Arrow-Pratt risikoaversion er en koefficient for absolut risikoaversion for en agent med Bernoulli nyttefunktionen $u$ og i beløb $x$:

$$-\frac{u''(x)}{u'(x)}$$

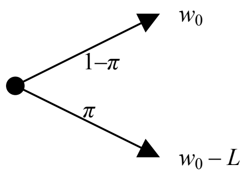
Jo større Arrow-Pratt koefficient, jo større risikoaversion. Dvs. at hvis Arrow-Pratt risikoaversions-koefficienten $-\frac{u''(x)}{u'(x)}$ vokser med $x$, så har agenten stigende risikoaversion.

<u>"Guide" til opgaveløsning</u>

- Udgangspunkt: Pengelotteri
- Hver handlemulighed inducerer et nyt pengelotteri
- Hvert lotteri giver bestemt forventet nytte
- Maksimer dette udtryk med hensyn til handlingen

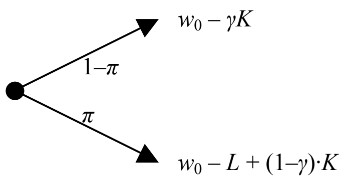
<u>Eks – valg af forsikringssum:</u>

Udgangssituation:

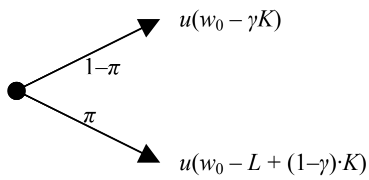



Så: Køb $K$ kr. i forsikringssum til prisen $\gamma$ pr. krone.

Nyt pengelotteri:




I nytte:




Maksimeringsproblemet består således i:

$$\max_K\left((1-\pi)\cdot u(w_0-\gamma K)+\pi\cdot u(w_0-L+(1-\gamma)\cdot K)\right)$$

Førsteordensbetingelsen:

$$(1-\pi)\cdot u'(w_0-\gamma K)\cdot(-\gamma)+\pi\cdot u'(w_0-L+(1-\gamma)\cdot K)\cdot(1-\gamma)=0$$

Vi ser nu på et <u>særtilfælde</u>, hvor vi har såkaldte *aktuarisk fair priser*, dvs. at $\pi = \gamma$. Dvs.

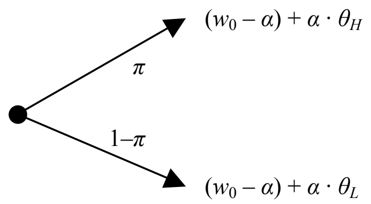
$$u'(w_0-\gamma K)=u'(w_0-L+(1-\gamma)\cdot K)$$

Hvis agenten er strengt risikoavers[7], dvs. at $u$ er strengt konkav, dvs. $u''(x) < 0 \quad \forall\ x \in \Re$, så gælder, at

$$w_0 - \gamma K = w_0 - L + (1\gamma) \cdot K \quad <=> \quad \underline{\underline{K = L}}$$

Dvs. at en strengt risikoavers agent vil vælge at forsikre sig fuldt ud, hvis han tilbydes en aktuarisk fair forsikringsprispolitik.
Hvis $\gamma > \pi$, så vil det optimale køb $K^* < L$, og dermed er risikoen for forbrugeren ikke helt væk.

<u>Eks – valg af investering:</u>
Antagelser: Bankrente = 0, to udfald af aktieinvestering – høj eller lav, og indkomsten er $w_0$.




Den sum som agenten vælger at investere i aktier er dermed $\alpha$, og den forventede nytte bliver:

$$\pi \cdot u(w_0 - \alpha + \alpha \cdot \theta_H) + (1 - \pi) \cdot u(w_0 - \alpha + \alpha \cdot \theta_L)$$

Med kendskab til funktionen $u$, så skal man blot differentiere den forventede nytte mht. handlingen, som altså her er investeringssummen $\alpha$, og sætte lig nul.

<u>Generelt om løsning af opgaver:</u>
Generelt kan man sige om løsning af opgaver af den type som de to eksempler ovenfor illustrerer, at løsningen vil afhænge af:

- Agentens holdning til risiko, dvs. $u$
- Markedsbetingelser, dvs. $\pi$, $\theta_H$, $\theta_L$ og $r$.

[7] Normal antagelse at gøre.

**<u>Varian kap. 13 – Aktiver med usikkerhed</u>**

Kapitel 13 omhandler hvordan handel med aktiver (aktier) fungerer som handel med risiko.

Vi betragter en forsimplet model, den såkaldte *Mean-Variance* model, der gør følgende antagelser:

De ting investorer interesserer sig for er:

- Forventet afkast (jo højere, jo bedre)
- Varians / standardafvigelse på afkast (jo mindre, jo bedre)

Vi ser nu på en investor, der står med valget mellem at investere i et aktiv med risikofrit afkast $r_f$, eller i en aktiepulje, hvis afkast $m_s$, afhænger af hvilken tilstand $s$ man befinder sig i. Der er derfor en vis usikkerhed for investor. Han kan vælge at investere andelen $x \in [0;1]$ i aktiepuljen. Det realiserede afkast i tilstand $s$ bliver således:

$$x \cdot m_s + (1-x) \cdot r_f$$

Det forventede afkast bliver:

$$r_x = \sum_s \pi_s \cdot (x \cdot m_s + (1-x) \cdot r_f) = \sum_s \pi_s \cdot x \cdot m_s + \sum_s \pi_s \cdot (1-x) \cdot r_f =$$

$$x \cdot \sum_s \pi_s \cdot m_s \quad + \quad (1-x) \cdot r_f = \underline{\underline{x \cdot r_m + (1-x) \cdot r_f}}$$

idet det undervejs er benyttet, at det forventede afkast $r_m$ af aktiepuljen netop er det vægtede gennemsnit af afkastene $m_s$ med vægtene $\pi_s$ (der netop er sandsynlighederne for hvert af afkastene), dvs. $r_m = m_s \cdot \pi_s$ . Desuden er det benyttet at $\sum_s \pi_s = 1$.

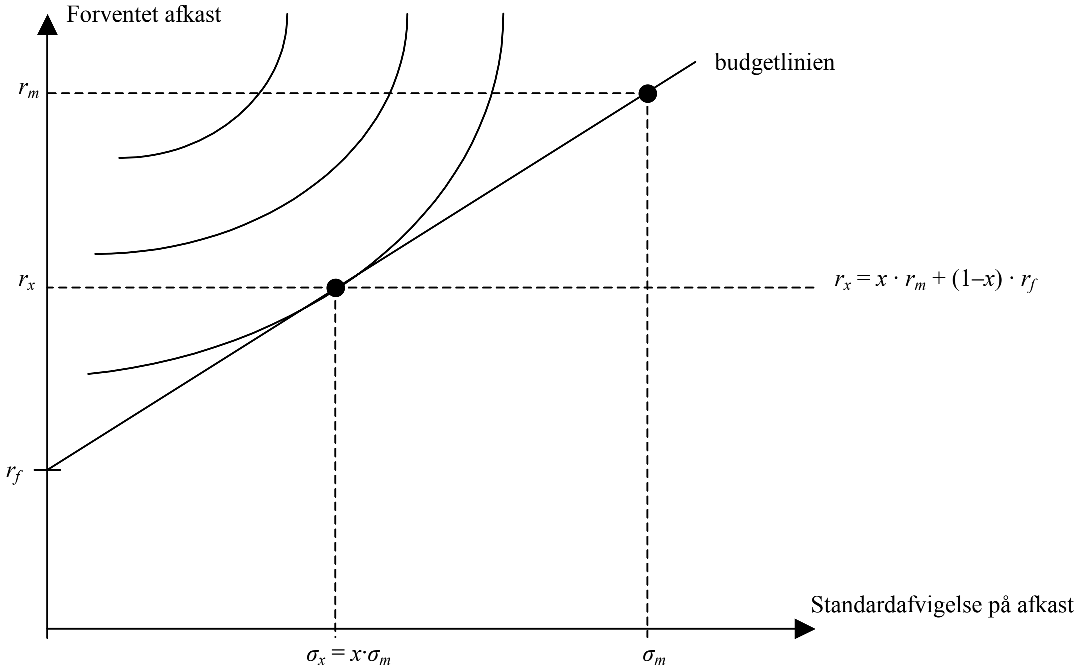
Nu ser vi på *variansen* i afkastet:

$$\sigma_x^2 = \sum_s \pi_s \cdot (x \cdot m_s + (1-x) \cdot r_f - r_x)^2 = \sum_s \pi_s \cdot (x \cdot m_s + (1-x) \cdot r_f - x \cdot r_m - (1-x) \cdot r_f)^2 =$$

$$\sum_s \pi_s \cdot (x \cdot m_s - x \cdot r_m)^2 = \sum_s \pi_s \cdot x^2 (m_s - r_m)^2 = \underline{\underline{x^2 \cdot \sigma_m^2}}$$

og der med er standardafvigelsen på investeringen $\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2} = \underline{\underline{x \cdot \sigma_m}}$

Vi ser nu på en grafisk illustration, hvor vi afsætter standardafvigelsen ud af 2. aksen og det forventede afkast ud af 1. aksen. Måden det sker på er helt analog til den almene efterspørgselsteori, blot skal man huske på, at her er standardafvigelsen et onde, mens forventet afkast er et gode.




Ovenstående figur viser det tradeoff som forbrugeren står imellem. Forbrugeren vil gerne have så højt forventet afkast som muligt, og samtidig så lav standardafvigelse som muligt. Budgetlinien repræsenterer de mulige kombinationer af disse som investoren kan vælge. Han vælger selvfølgelig den der maksimerer hans nytte, dvs. dér hvor den indifferenskurven netop tangerer budgetlinien. Da budgetlinien netop markerer dette tradeoff, så kan man sige, at hældningen på budgetlinien er prisen på risiko. Hældningen på budgetlinien fås direkte ud fra figuren som:

$$\rho = \frac{r_m - r_f}{\sigma_m - 0} = \frac{r_m - r_f}{\sigma_m}$$

, som altså er ”prisen på risiko”.

Forbrugeren maksimerer som sædvanlig ved at sætte MRS lig det relative prisforhold:

$$MRS = -\frac{\frac{\partial u}{\partial \sigma}}{\frac{\partial u}{\partial \mu}} = \frac{r_m - r_f}{\sigma_m}$$

Risikomåling

I modellen ovenfor er antaget at risiko måles alene ved dets standardafvigelse, men det er klart at det er den relative risiko der er interessant i virkeligheden. Hvor stor er risikoen på det pågældende aktiv relativ til, hvor stor er risikoen på markedet generelt set.

Man definerer et risikomål $\beta$ for en aktie som følger:

$$\beta_i = \frac{\textit{Hvor risikabel aktien er}}{\textit{hvor risikabelt aktiemarkedet er}}$$

Rent matematisk definerer vi det som:

$$\beta_i = \frac{\mathrm{cov}(\tilde{r}_i, \tilde{r}_m)}{\mathrm{var}(\tilde{r}_m)}$$

At der er ~ over variablenes navne, betyder blot at man nu betragter dem som stokastiske variable.

Ligevægt på aktiemarkedet

Vi skal nu finde ud af hvad afkastet på en aktie skal være i ligevægt, dvs. hvordan den prisfastsættes. Vi starter med at finde frem til den risikopræmie som investor skal have for at investere i den pågældende aktie. Den afhænger af prisen på risiko $\rho$, markedsrisikoen $\sigma_m$ og aktiens relative risiko $\beta_i$:

$$\textit{risikopræmie} = \beta_i \cdot \sigma_m \cdot \rho = \beta_i \cdot \sigma_m \cdot \frac{r_m - r_f}{\sigma_m} = \beta_i \cdot (r_m - r_f)$$

Det gælder for alle aktiver (aktier) at afkastet justeret med risikopræmien for det enkelte aktiv må være det samme. Derfor gælder det naturligvis også for det risikofrie aktiv:

$$r_i - \beta_i \cdot (r_m - r_f) = r_f - \beta_f \cdot (r_m - r_f) = r_f$$

idet $\beta_f$ pr. definition må være 0.

Derfor gælder det for ethvert aktiv, at afkastet på være givet som[8]:

$$\underline{\underline{r_i = r_f + \beta_i \cdot (r_m - r_f)}}$$

Dette er hovedresultatet i den såkaldte **CAPM model**[9].

[8] idet vi omrokerer ovenstående ligning
[9] Capital Asset Pricing Model

**Opgaver til tid, usikkerhed og aktiver**

---

2000-II-3

*Betragt en obligation, der hvert år i alle år fremover giver ejeren en udbetaling på x kr. Rentesatsen i samfundet er r (og forventes at være dette i al fremtid). Angiv da obligationens nutidsværdi og forklar udtrykket.*

$$NV = \frac{x}{1+r} + \frac{x}{(1+r)^2} + \frac{x}{(1+r)^3} + \ldots = \frac{1}{1+r} \cdot \left( x + \frac{x}{1+r} + \frac{x}{(1+r)^2} + \frac{x}{(1+r)^3} + \ldots \right) = \frac{1}{1+r} \cdot (x + NV) \quad <=>$$

$$NV \cdot (1+r) - NV = x \quad <=> \quad NV = \underline{\underline{\frac{x}{r}}}$$

Nutidsværdien af en række af udbetalinger er summen af den tilbagediskonterede værdi af hver af udbetalingerne. Nutidsværdien angiver således værdien af udbetalingsstrømmen angivet i "nutids-kroner".

---

2000-II-4

*Michelle lever i to perioder i en økonomi hvor der er ét forbrugsgode. Hun ejer initialbeholdningen* $\omega = (\omega_1, \omega_2) \in \Re^2_{++}$*, hvor indekset refererer til perioden, henholdsvis periode 1 og periode 2. Hun har muligheden for at spare op eller at låne i periode 1, til rentesatsen r. Kommentér følgende påstand: "en rentestigning vil altid dæmpe forbruget (i periode 1)".*

$$\omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} \qquad p_1 \cdot c_1 + p_2 \cdot c_2 \cdot \tfrac{1}{1+r} = p_1 \cdot \omega_1 + p_2 \cdot \omega_2 \cdot \tfrac{1}{1+r} \quad <=>$$

$$(1+r) \cdot p_1 \cdot c_1 + p_2 \cdot c_2 = (1+r) \cdot p_1 \cdot \omega_1 + p_2 \cdot \omega_2 \quad el. \quad p_1^\tau \cdot c_1 + p_2 \cdot c_2 = p_1^\tau \cdot \omega_1 + p_2 \cdot \omega_2 \quad ,$$

$$idet \; p_1^\tau \equiv (1+r) \cdot p_1$$

Vi ser nu på en situation, hvor $r \uparrow \; => \; p_1^\tau \uparrow$

Vi opskriver Slutsky ligningen:

$$\frac{\partial c_1}{\partial p_1^\tau} = \frac{\partial h_1}{\partial p_1^\tau} + (\omega_1 - c_1) \cdot \frac{\partial c_1}{\partial m}$$

Substitutionseffekten $\frac{\partial h_1}{\partial p_1^\tau}$ trækker entydigt i retning af mindre forbrug i dag ved en rentestigning, da det svarer til at prisen på forbrug i dag relativt til prisen på forbrug i morgen stiger. Det er naturligt at antage at indkomst i dag[10] er et normalt gode, dvs. $\frac{\partial c_1}{\partial m} > 0$, og dermed afhænger indkomsteffektens virkning af, hvorvidt forbrugeren er låntager eller långiver, dvs. hvorvidt $\omega_1 - c_1 > 0$ eller $\omega_1 - c_1 < 0$

Hvis forbrugeren er låntager, dvs. $\omega_1 - c_1 > 0$, så er påstanden sand, idet da også indkomsteffekten vil trække i retning af mindre forbrug i dag ved en rentestigning.

Hvis forbrugeren er långiver, dvs. $\omega_1 - c_1 > 0$, så kan vi ikke udtale os om påstandens korrekthed eller ej, da det afhænger af størrelsen af substitutionseffekten versus størrelsen af indkomsteffekten, hvor substitutionseffekten som tidligere skrevet trækker entydigt i retning af mindre forbrug i dag ved en rentestigning, mens indkomsteffekten da vil trække i retning af mere forbrug i dag, da en långiver ved en rentestigning vil være blevet relativt rigere.

Ergo er påstanden altså <u>falsk</u>, da man i påstanden ”glemmer” indkomsteffekten!

---

<u>2001-II-3</u>

*Betragt den skotske klan McInvest, hvor hvert familiemedlem råder over en formue og har von Neumann-Morgenstern præferencer over pengelotterier, givet ved en Bernoulli-funktion defineret på pengebeløb,* $u_i$*:* $\mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}$*, hvor* $u_i$ *er voksende. Hver investor fra klanen kan anbringe sin formue ved at placerer ikke-negative beløb i to forskellige aktiver. For det første det sikre aktiv, der giver nettoafkastet* $r > 0$ *ikke alle tilstande. For det andet en investeringsforening (kald beløbet investeret heri for* $\alpha$*), hvis nettoafkast i tilstand s er* $\theta_s$*, idet tilstand s indtræffer med sandsynligheden* $\pi_s > 0$*, og det gælder at* $\sum_s \pi_s = 1$ *og* $\sum_s \pi_s \cdot \theta_s > r$*. Det oplyses at Ian McInvest er risikoneutral.*

[10] OG indkomst i morgen, men det er ikke centralt her.

*Bevis da, at det for Ian optimale beløb at placere i investeringsforeningen opfylder α* = W, hvor W er hans formue.*

Vi starter med at opskrive hans nytte:

$$U = \sum_s \pi_s \cdot u\left(r \cdot (W - \alpha) + \theta_s \cdot \alpha\right)$$

Denne skal nu maksimeres med hensyn til handlingen, dvs. $\alpha$:

$$\max_\alpha E(U) \qquad s.t. \qquad \alpha \le W$$

Ian er risikoneutral. Dvs.

$$E(U) = u\left(\sum_s \pi_s \cdot r \cdot (W - \alpha) + \sum_s \pi_s \theta_s \cdot \alpha\right) = u\left(r \cdot (W - \alpha) \cdot \sum_s \pi_s + \alpha \cdot \sum_s \pi_s \cdot \theta_s\right) =$$

$$u\left(r \cdot (W - \alpha) + \alpha \cdot \sum_s \pi_s \cdot \theta_s\right)$$

Denne forventede nytte skal nu differentieres:

$$\frac{\partial E(U)}{\partial \alpha} = u'\left(-r + \sum_s \pi_s \cdot \theta_s\right)$$

Det er oplyst i opgaveteksten at $\sum_s \pi_s \cdot \theta_s > r$, dvs. optimalt er $\alpha \rightarrow \infty$. Bibetingelsen bliver dermed bindende, dvs. $\underline{\underline{\alpha^* = W}}$.

---