Erhvervsøkonomi **Forår 2001**
Chr. Hjorth-Andersen

En note om lineær programmering

Lineær programmering, eller LP-modeller, som de ofte kaldes, var en metode, der blev udviklet i 50'erne og 60'erne. I Danmark var især Sven Danø, professor i driftsøkonomi ved Københavns Universitet, medvirkende til udbredelsen af metoden. Som et blandt mange eksempler kan man forestille sig følgende situation:

En virksomhed har en produktion af to forskellige produkter A og B, som begge skal undergå behandling på to 3 forskellige maskiner, M1, M2 og M3.

Maskine 1: Vare A kræver 1 times maskintid og
vare B kræver 2 timers maskintid
Der er ialt 300.000 maskintimer til rådighed
Maskine 2 vare A kræver 1 times maskintid, og
vare B kræver 1 times maskintid,
Der er ialt 200.000 maskintimer til rådighed
Maskine 3: Vare A kræver 3 times maskintid
vare B kræver 2 timers maskintid
Der er ialt 550.000 maskintimer til rådighed.
Dækningsbidrag:
Vare A: 6 kr.
Vare B. 5 kr.

Bestem den optimale produktion af de to produkter.

Det økonomiske problem består i, at vare A giver det højeste dækningsbidrag, men beslaglægger også mere maskintid per enhed, især på maskine 3. Uden systematik er det svært at overskue problemets løsning.

Lad os derfor stille det formelt op. Vi vil maksimere en målfunktion, der består af summen af dækningsbidragene fra de to produktioner, altså summen af dækningsbidraget fra A, d.v.s. 6*A, hvor A er det faktiske antal producerede enheder, og dækningsbidraget fra B, altså 5*B, hvor B er det faktiske antal enheder. Formelt skrives dette som

$$\text{MAKS:} \quad 6*A + 5*B$$

under nogle bibetingelser. Den første maskine giver *bibetingelsen* eller *restriktionen*, at $A + 2*B \leq 300.000$. Vi regner i timer, og har ikke mere end 300.000 timer til rådighed. Det er vigtigt at notere sig ulighedstegnet, for vi kan godt lade en maskine stå ledig (selv om det alt andet lige er uøkonomisk), men vi kan ikke bruge flere maskintimer, end vi har. Bemærk, at sådanne tekniske koefficienter, der mere eller mindre eksplicit bliver antaget konstante, bevirker, at restriktionen bliver lineær. Tilsvarende udtryk får vi for de to andre maskiner. Formelt skriver vi, at vi vil maksimere målfunktionen under bibetingelserne, som

SUB:	$1*A + 2*B$	$\leq$	300.000	(svarende til maskine 1)
	$1*A + 1*B$	$\leq$	200.000	(svarende til maskine 2)
	$3*A + 2*B$	$\leq$	550.000	(svarende til maskine 3)
	A	$\geq$	0	(Produktionen af A kan ikke blive negativ)
	B	$\geq$	0	(Produktionen af B kan ikke blive negativ)

I den generelle udformning kan der være m restriktioner (maskiner) og n varer, hvor vare i giver dækningsbidraget d_i .D.v.s. at vi får

MAX: $\sum_{i=1}^{n} d_i * x_i$

SUB: $a_{11}\, x_1 \;+++\; a_{1n}\, x_n \;\leq\; b_1$

....

....

$a_{1m}\, x_1 +++ \; a_{mn}\, x_m \;\leq\; b_m$

Eller i mere kompakt matrixnotation

MAX: $\mathbf{d*x}$

SUB: $\mathbf{A*x} \leq \mathbf{b}$,

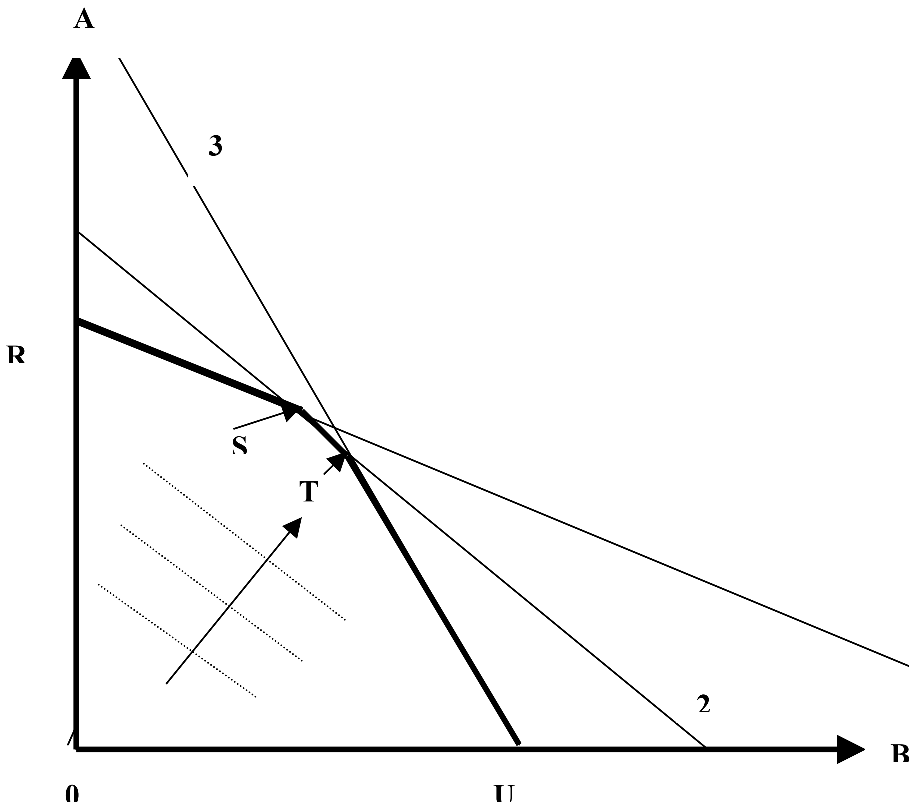
hvor d er en n'dimensional rækkevektor, x er en n'dimensional søjlevektor, A er en (m,n) matrix og b er en m'dimensional søjlevektor.

Her angiver $\{a_{ij}\}$ den mængde (maskin)timer, der er nødvendig for vare i ved maskine j; de kaldes ofte *de tekniske koefficienter*. Der er intet i vejen for, at nogle af dem kan være nul, men de kan selvfølgelig ikke blive negative. b_j angiver maskinkapaciteten for maskine j, = 1,,,m. Lineær programmering består således i at maksimere en lineær funktion, målfunktionen, som også kan have andre navne såsom kriteriefunktionen eller mere konkret f.eks. dækningsbidragsfunktionen, under et sæt af lineære uligheder.

I nogle situationer er der tale om et minimeringsproblem, men principperne er de samme.

Tovareillustration. Hvis der kun er 2 varer A og B, kan LP problemet gives en meget oplysende grafisk illustration.

Vi tegner en figur med A og B ud af akserne.



Figur 1. Restriktionerne afgrænser en polygon.

På figuren er der indtegnet 3 restriktioner. Vi kan højst producere inden for hver restriktion, så vi må ligge på eller nedenfor alle 3 linier. Det betyder, at vores *mulighedsområde* for produktionen blive afgrænset af markerede polygon ORSTU, som består af en række endepunkter, hvor to restriktioner skærer hinanden, forbundet med rette linier.

Spørgsmålet er så, hvilket punkt vi skal vælge, når vi skal vælge os et punkt enten inden for eller på randen af denne polygon.

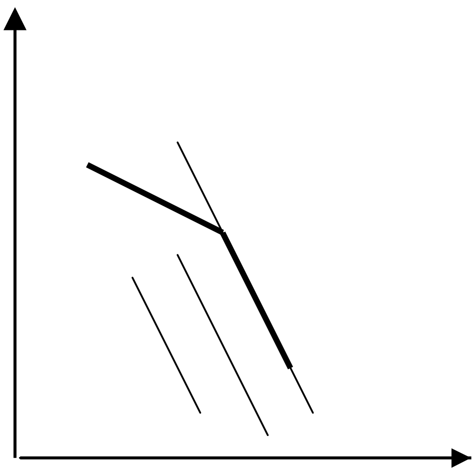
Da målfunktionen er lineær i A og B, vil en k pct. forøgelse af både A og B give en k pct. forøgelse af dækningsbidraget. Det vil derfor aldrig kunne betale sig at producere inden for randen af mulighedsområdet. I eksemplet ovenfor med 2 varer havde vi, at det samlede dækningsbidrag D var

$$D = 6*A + 5*B \qquad \text{eller}$$

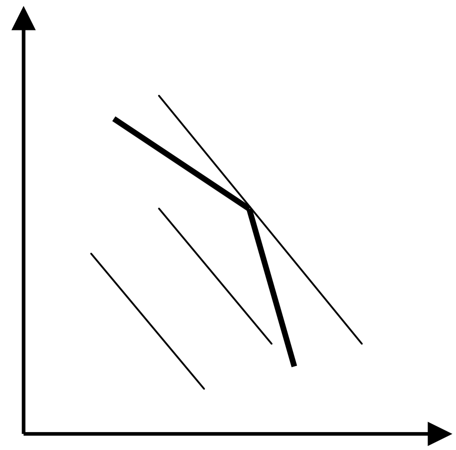
$$A = D/6 - 5/6*B$$

Vores målsætningsfunktion er altså en linie med hældningen -5/6, der skal forskubbes så langt ud mod højre som muligt, hvorved D/6 og dermed D bliver så stor som mulig. På figuren er denne ligning illustreret med 3 stiplede linier, som skal forskydes ud mod randen så langt som muligt i pilens retning (vinkelret på de 3 stiplede linier). Der er nu to muligheder:

Enten er denne linie parallel med en af linierne (fig 2a), eller også vil den komme til at ligge og vippe på et endepunkt (fig. 2b).



Figur 2a



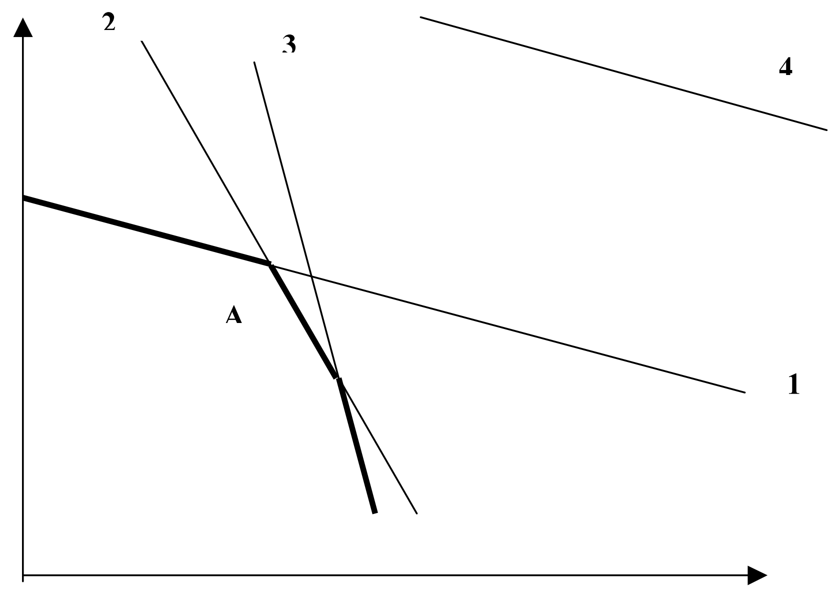
Figur 2b

På figur 2a og 2b er kun vist et udsnit af mulighedsområdet. Den afgørende pointe er, at på figur 2b er der ingen tvivl, endepunktet er det punkt, vi længst kan forskyde dækningsbidragslinien til, og dermed det optimale punkt. Men på figur 2a vil godt nok alle punkter, der sammenfalder med dækningsbidragslinien, i princippet være lige gode, men også endepunktet vil være lige så godt. *Vi behøver altså ikke undersøge alle punkter på randen af figuren, men kan nøjes med undersøge endepunkterne*. På figur 1 svarer det til, at den optimale løsning må være et af punkterne R, S , T, U. Der kan i hvert fald ikke findes nogen bedre løsning.

Denne egenskab ved LP var baggrunden for en ofte anvendt *algoritme* eller beregningsmetode, som blev kaldt SIMPLEX-metoden, og som løst sagt bestod i at undersøge endepunkterne efter en nærmere bestemt fremgangsmåde.

Udviklingen inden for EDB har imidlertid bevirket, at der ikke længere er det samme behov for at beskæftige sig med detaljerne i den algoritme, da der findes en lang række programmer til at løse LP problemer med, så vi vil her mere koncentrere os om at vise, hvordan man i praksis kan løse LP problemer. I næste afsnit skal vi konkret vise, hvordan LP problemer kan formuleres **og løses** i Excel, selv om mere professionelle anvendelser utvivlsomt vil anvende et egentligt LP-program. Men forinden er der grund til at fremhæve nogle særlige egenskaber ved løsningen.

Bindende og ikke-bindende restriktioner. Betragt figuren nedenfor



Der er indtegnet 4 restriktioner. Hvis det optimale punkt er A, fremkommet ved en skæring mellem restriktion 1 og restriktion 2, ses det klart af figuren, at restriktion 3 konkret ikke har nogen betydning for den optimale løsning; vi siger, at den er *ikke-bindende*. Omvendt er restriktion 1 og 2 bindende. For en *bindende* restriktion gælder, at lighedstegnet i optimum er opfyldt, medens det strenge ulighedstegn $<$ gælder for den ikke-bindende restriktion. Restriktion 4 er aldrig bindende - den er tegnet parallelt med restriktion 1 og kunne svare til en restriktion $A+2B \leq 600.000$; en sådan restriktion ligger helt uden for restriktion 1. Det vil imidlertid ofte være sådan, at om en restriktion er bindende eller ej, vil afhænge ikke kun af restriktionen selv, men af såvel koefficientmatricen af tekniske koefficienter som af de koefficienter - "de relative priser" - der indgår i målfunktionen. Hvis man ændrede de relative priser, kunne restriktion 3 blive bindende, medens f.eks. restriktion 1 ikke ville blive bindende.

En bindende restriktion j lægger pr. definition bånd på vores handlinger, så hvis vi løsner bindingen, d.v.s. forøger b_j, vil vi også forøge vores dækningsbidrag D.

Som en illustration kan tages eksemplet ovenfor med 2 varer, hvor den optimale produktionsomfang viser sig at blive bestemt af de to bindende restriktioner 2 og 3, se nedenfor, medens restriktion 1 er ikke-bindende. Vi kan altså opfatte situationen således, at vi finder optimum ved hjælp af at maksimere dækningsbidraget under bibetingelserne 2 og 3, idet der anvendes lighedstegn. Vi danner på sædvanlig facon Lagrangefunktionen L med de tilhørende multiplikatorer 8 og (og differentierer.

$$L = 6A + 5B - 8(A+B-200.000) - ((3A + 2B - 550.000)$$

$$\partial L/\partial A = \quad 6 - 8 - 3(\quad = 0$$
$$\partial L/\partial B = \quad 5 - 8 - 2(\quad = 0$$
$$\partial L/\partial 8 = \quad A + B - 200.000 \quad = 0$$
$$\partial L/\partial (= \quad 3A + 2B - 550.000 \quad = 0$$

Vi får 8 = 3 og (= 1 og iøvrigt også A = 150.000 og B = 50.000. Med andre ord: Hvis vi forøger kapaciten for restriktion 2 med 1 enhed, vil dækningsbidraget stige med 3 enheder. For restriktion 3 er det tilsvarende tal 1. Tallene 8 og (kaldes *skyggepriser.* De viser, hvad en marginal forøgelse på 1 enhed af kapaciteten på en restriktion vil give i bidrag i målfunktionen. Det følger intuitivt heraf, selv om det ikke er bevist, at:

skyggeprisen på ikke-bindende restriktioner er 0

Der sker jo ikke nogen påvirkning af det samlede dækningsbidrag, hvis vi marginalt forøger kapaciteten. Dette er et vigtigt resultat, som har talrige økonomiske anvendelser. Da maskine 1 ikke giver nogen bindende restriktion, er skyggeprisen for dens anvendelse 0. Det vil sige, at indtil restriktionen for maskine 1 bliver bindende, er det gratis at anvende den.

Lad os f.eks. antage, at virksomheden får en lille ny ordre, som den skal give et tilbud på, som involverer de 3 maskiner med et forbrug på 10 timer hver. Hvordan skal man så indregne værdien af tidsforbruget ved brug af de tre maskiner?

Svaret er umiddelbart givet ved anvendelse af skyggepriser: Maskine 1 er gratis, så det koster ikke virksomheden noget at anvende den (marginalt) mere. Ved brug af maskine 2 i 10 timer går vi derimod glip af en indtjening af 3*10 kroner og ved brug af maskine 3 i 10 timer går vi ligeledes glip af 1*10 kroner, så opportunity costs ved den nye ordre er (for så vidt angår dette maskintidsforbrug) = 30 + 10 = 40 kroner.

Lad os resumere resultaterne

Restriktionen er bindende	Restriktionen er marginalt ikke-bindende	Restriktionen er aldrig bindende
Skyggeprisen er positiv	Skyggeprisen er nul ved marginale ændringer	Skyggeprisen er altid nul

Eksempel på løsning af LP-problem ved hjælp af EXCEL, se mappen "LP programmering med EXCEL"

Det anbefales at printe denne vejledning ud eller have den liggende, medens regnearket gennemgås.
Lad os have ovenstående problem

MAKS: 6A + 5B
SUB:

(1)	A+2B	$\leq$	300.000
(2)	A+ B	$\leq$	200.000
(3)	3A+2B	$\leq$	550.000
(4)	A	$\geq$	0
(5)	B	$\geq$	0

Da der kun er to variable A og B, kan der findes en grafisk løsning. Denne er givet i arket "Grafisk Illustration". De 3 restriktioner er indtegnet tillige med "isoprofitlinien, som er den røde kurve og markerer hældningen på dækningsbidraget D = 6A+5B. Det er denne linie, som vi skal parallelforskyde så langt som muligt opad til højre. Det kan være lidt svært at se helt klart, hvilken løsning, der er optimal, men der er to kandidater, nemlig (A,B) = (100.000, 100.000) og (A,B) = (150.000,50.000) – de præcise værdier for disse to punkter kan findes ved simpelthen at løse de tilhørende ligninger. En direkte indsættelse i målfunktionen giver hhv. 110.000 og 115.000, så den optimale løsning bliver A = 150.000 og B = 50.000, altså den løsning, vi fandt fra før.

I EXCEL løses det eksakt på følgende måde. Se "Excel-regnearket LP-programmering med EXCEL" med følgende ark

1. Problemformulering
2. Grafisk løsning
3. Svarrapport 1
4. Sensitititetsrapport 1
5. Svarrapport 2

Vi foretager nu følgende skridt:

1) Definer to celler svarende til de to værdier A og B. Her er sat A = a1 og B = b1.
2) Sæt helt foreløbigt a1=1 og b1=1.
3) Indsæt målfunktionen i f.eks. som her cellen a3, idet der skrives = 6*A1+5*B1. Der vises nu (selvfølgelig) tallet 11. (Gangetallene * er her overflødige, men anbefales i praksis.)
4) Skriv de 3 lineære restriktioner og de to ikke-negativitetsbetingelser som vist, f.eks. den første som =A1+2*B1. Da vi foreløbigt har sat A1=1 og B1=1, fås tallet 3.Læg mærke til, at vi skriver venstresiden af uligheden i èn celle, og højresiden i en anden.

5) Tryk på funktioner i menulinien og find "Problemløser" (eng. "solver").[1] Vi skal nu udfylde 4 felter.
   a) Målcellen, nemlig den størrelse, som vi ønsker at maksimere.
   b) Rubrikken maks, min eller lig med. Vi vælger maks.
   c) Ved redigering af cellerne: A1 og B1. For det er jo netop disse værdier, som vi kan ændre på. Hvis de ikke står ved siden af hinanden, skal du anvende et semikolon efter hver henvisning.
   d) Underlagt betingelserne. Tryk på "Tilføj" og indlæg den første betingelse. Tryk på tilføj igen og indlæg den næste o.s.v. Når alle 5 betingelser er indføjet, tryk på Løs, og EXCEL giver en meddelelse om, at den har fundet en løsning.

6) Sæt kryds i rubrikken "Behold problemløsning" og tryk på svarrapport. Denne fremkommer på et særligt ark kaldet "Svarrapport 1", som typisk bliver sat ind i starten af projektmappen. Det har et udseende som vist på Excel-arket. Læs dette. Noter, at slutværdien for målvariablen er 115.000, altså den løsning, vi fandt ovenfor. Noter, at restriktion (1) ikke er bindende, jfr. ovenfor, og at restriktion (2) og (3) er bindende. Noter også, at vi direkte får udskrevet, hvor meget der er af ledig kapacitet ved den optimale løsning for restriktion 1.
   Løs problemet igen og bed om en sensitivitetsrapport. Konstater, at Lagrangemultiplikatoren = skyggeprisen for restriktion 2 er på 3 og for restriktion 3 er skyggeprisen på 1. Altså de løsninger, vi fandt ovenfor.

   Hermed er vi for så vidt færdige, som vi har løst vores problem, men for illustrationens skyld fortsætter vi med
   .
7) Vi ser, hvad der sker, hvis vi antager, at kapaciteten for (den bindende) restriktion 2 ikke var 200.000, men 200.001, men problemet (1)-(5) i øvrigt er uændret.

   MAKS: 6A + 5B
   SUB:

(1)	A+2B	$\leq$	300.000
(2)	A+ B	$\leq$	200.00**1**
(3)	3A+2B	$\leq$	550.000
(4)	A	$\geq$	0
(5)	B	$\geq$	0

   Vi indtaster problemet igen, blot med 200.001 i stedet for 200.000 og løser.

8) På arket svarrapport 2 er vist, at målfunktionen, "slutværdien" ændrer sig til 115.003, hvor den før var 115.000, altså en stigning på 3. Men det var jo netop definitionen af skyggeprisen på restriktionen, som vi netop har fundet til at blive 3.

[1] Hvis problemløser (solver) ikke er tilgængelig, kan du gå ind på funktioner i menuen og se under "tilføjelsesprogrammer", om den er tilgængelig der. Hvis den er tilgængelig som tilføjelsesprogram, må du installere den. Alternativt må du sørge for at få den installeret.

Et advarende slutord. LP-modeller har været ganske populære, såvel i økonomisk teori som i praksis, og de anvendes stadigt, men nok ikke i samme omfang. Det skyldes nok to forskellige forhold. For det første, at de har en tilbøjelighed til at give for drastiske resultater. De giver ikke anledning til marginale ændringer i de optimale værdier som følge af marginale ændringer i parametrene. Enten giver de slet ingen ændringer - den optimale løsning er den samme i et vist parameterinterval - eller også de giver de anledning til ganske store ændringer. I sidste tilfælde kan en lille ændring i en teknisk koefficient forårsage en drastisk ændring i den optimale løsning. Det kan for så vidt også være rigtigt, men som en beskrivelse af virkeligheden er det typisk ikke tilfældet.

For det andet var LP en lang overgang i praksis den eneste modeltype, der teknisk og beregningsmæssigt kunne håndteres. Dette medførte en vis tilbøjelighed til at antage linearitet, også hvor der krævedes en del god vilje for at acceptere denne forudsætning. Med moderne hjælpemidler er det ikke på samme måde længere nødvendigt af beregningstekniske hensyn at kræve linearitet. Og det er det faktisk heller ikke i Excel.

Brug af problemløser til mere generelle maksimeringsproblemer.

Funktionen "Problemløser" i Excel er ikke begrænset til blot LP-problemer eller overhovedet indrettet specielt til disse. Der er intet i vejen for, at der i målfunktionen indgår et ikke-linært udtryk, f.eks. at prisen er en faldende funktion af den solgte mængde.

Hvis f.eks. på vare A er 15 - 0,3 A og prisen på vare B er 10 - 0,4 B, fås målfunktionen

$$\text{MAKS:} \quad -0{,}3*A^2 + 15*A \ -0{,}4*B^2 + 10*B,$$

som så kan maksimeres under de relevante bibetingelser. Men hvis såvel målfunktion som bibetingelser er af speciel karakter, er der ingen garanti for hverken eksistens eller entydighed af en løsning. Ikke desto mindre er problemløserfunktionen et ganske kraftigt værktøj til "mindre" problemer, så derfor

Til lykke:

Du er nu i stand til konkret at løse flere erhvervsøkonomiske problemer end de fleste, ikke blot i teorien, men også i praksis.